

BİL 1006

Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu

Hafta 9:
Matris Determinantı



Bir Matrisin Determinantı

Determine, İngilizce belirlemek, karar vermek anlamına gelir. Bu fiilin isim hali olan determinant ise *belirleyici* anlamına gelir.

$n \times n$ boyutundaki bir kare matrisin determinantı ise bu matrisin tersinin olup olmadığını belirlememizde rol oynar. Basitce, bir matrisin determinantı 0'dan farklı ise bu matrisin tersi var diyeceğiz.

n tane bilinmeyenden oluşan n tane lineer denklem verilsin. Bu denklemin katsayılarını A katsayılar matrisinde, bilinmeyenlerini x vektöründe, sonuçlarını b vektöründe turalım:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_b$$

Burada x 'i yalnız bırakmak için denklemin her tarafını A 'nın tersi olan A^{-1} ile çarparsak:

$$x = A^{-1}b$$

olur. Yani sistemin çözümü basitçe $A^{-1}b$ dir. Fakat katsayılar matrisinin tersinin (A^{-1}) her zaman var olacağı garanti değildir. Bu matrisin tersinin olup olmayacağını matrisin determinantına bakarak karar vereceğiz.

Sonuc olarak verilen lineer denklem sisteminin bir çözümünün var olup olmadığını belirlemek için katsayılar matrisinin determinantına bakacağız.

Determinant Notasyon:

Determinantı $\mathbb{R}^{n \times n}$ uzayından $\mathbb{R}$ ' ye bir fonksiyon olarak göstereceğiz:

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

Yani örneğin A matrisin determinatını $\det(A)$ ile göstereceğiz. Bundan başka, aşağıdaki şekilde mutlak değer kullanarak da determinant gösterilir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A)$$



Determinantın Hesaplanması

A katsayılar matrisinin determinant hesaplaması için genel bir kural vermeden önce A 'nin bazı özel durumları için determinant hesaplamasını verelim.

1. A , 1×1 bir matris ise:

Bu durumda A 'nın tek bir elemanı vardır: $A = [a_{11}]$ ve verilen denklem $a_{11}x = b$ formunda olur. Buradan $x = b/a_{11}$ olur. Sistemin çözümünün olabilmesi için $a_{11} \neq 0$ olmak zorundadır. O halde burada belirleyici faktör a_{11} 'dir; dolayısıyla tek elemanlı bir matrisin determinanı sahip olduğu tek elemandır:

$$A = [a_{11}] \text{ ise } \det(A) = a_{11}$$

2. A , 2×2 bir matris ise:

Bu durumda $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ve buna bağlı lineer denklem sistemi ise:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

olur.



Birinci denklem a_{22} ; ikinci denklem $-a_{12}$ ile çarpılıp denklemler toplanırsa

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

elde edilir. Buradan x_1 çekilirse:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

olur. Sistemin çözümünün olabilmesi için payda $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, 0'dan farklı olmak zorundadır. O halde burada belirleyici olan $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ büyüklüğüdür. Sonuc olarak A 'nın determinanti da bu büyüklüğe eşit olur.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ise } \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Tek elemanlı bir matrisin determinanti kendisi olduğundan a_{22} yerine $|a_{22}|$ ve a_{21} yerine $|a_{21}|$ yazılırsa $\det(A) = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|$ olur.

ör. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinanti nedir?

$$\det(A) = 4 \cdot 2 - (-1 \cdot 3) = 8 + 3 = 11$$

Birinci denklem a_{22} ; ikinci denklem $-a_{12}$ ile çarpılıp denklemler toplanır

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

elde edilir. Buradan x_1 çekilirse:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

olur. Sistemin çözümünün olabilmesi için payda $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, 0'dan farklı olmak zorundadır. O halde burada belirleyici olan $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ büyüklüğüdür. Sonuç olarak A 'nın determinanı da bu büyüklüğe eşit olur.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ise } \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Tek elemanlı bir matrisin determinanı kendisi olduğundan a_{22} yerine $|a_{22}|$ ve a_{21} yerine $|a_{21}|$ yazılabilir. O halde determinant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|$$



Burada dikkat edilmesi gereken nokta 2×2 boyutundaki matrisin determinant hesabının 1×1 boyutundaki matrislerin determinantını içermesidir.

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ise $\det(A) = 1 \cdot 3 - (-1 \cdot 2) = 5$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ise $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3. A , 3×3 bir matris ise:

Bu durumda $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ve buna bağlı lineer denklem sistemi ise:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$



Not: Burda kolaylık acısından b_1, b_2 ve b_3 'ü 0 olarak düşündük, cunku zaten bu degerler sistemin cozumunun var olup olmamasini etkilemez. Çözümün var olması A katsayilar matrisine baglidir.

x_2 ve x_3 'ü yok etmek icin birinci, ikinci ve ucuncu denklemler uygun katsayilarla carpilip bu denklemler toplanirsa

$$(a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}))x_1 = 0$$

olur. Sistemin çözümünün olabilmesi icin x_1 'in katsayısının 0'dan farkli olması gerekir. O halde

$$(a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})) \neq 0$$

olmalıdır. Sistemin cozumun var olup olmadigini bu katsayi belirler.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$$\det(A) = (a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}))$$

$$\det(A) = (a_{11}(\underbrace{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}_{\text{determinant of } A \text{ with row 1 and column 1 removed}}) - a_{12}(\underbrace{a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}}_{\text{determinant of } A \text{ with row 1 and column 2 removed}}) + a_{13}(\underbrace{a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}}_{\text{determinant of } A \text{ with row 1 and column 3 removed}}))$$

a_{11} 'in in olduğu satır ve sütun
A matrisinden çıkarıldığında ortaya
çıkan matrisin determinanı

a_{12} 'nin in olduğu satır ve sütun
A matrisinden çıkarıldığında ortaya
çıkan matrisin determinanı

a_{13} 'ün in olduğu satır ve sütun
A matrisinden çıkarıldığında ortaya
çıkan matrisin determinanı

3×3 boyutundaki bir matrisin determinant hesabı, 2×2 boyutundaki matrislerin determinantını ve dolayısıyla 1×1 boyutundaki matrislerin determinantını içermektedir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}(a_{22}|a_{33}| - a_{23}|a_{32}|) - a_{12}(a_{21}|a_{33}| - a_{23}|a_{31}|) + a_{13}(a_{21}|a_{32}| - a_{22}|a_{31}|)$$



ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı nedir?

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} & = & 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ & = & 1(1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) - 2(3 \cdot 4 - 2 \cdot 1) + 1(3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 0 - 20 + 5 = -15 \end{array}$$

ör.

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + kx_3 = 0$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin bir çözümünün *olmaması* için k ne olmalıdır?

Çözüm.

Denklem sisteminin bir çözümünün olmaması için katsayılar matrisinin determinanı 0 olmalıdır.

ör. Katsayılar matrisi: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & k \end{bmatrix}$ olup bu matrisin determinanı:

$$2(-2) + 1 \cdot (k + 3) + 3 \cdot (-2) = k - 7$$

olur. Determinanı 0 yapan k değeri 7 olur.

Determinant Genel Formül

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tipindeki bir kare matrisin determinanı şu formülle hesaplanır:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Burada i , 1 ile n arası herhangi bir tamsayıdır.

M_{ij} , A matrisinde a_{ij} elemanının olduğu satır ve sütun çıkarıldığında ortaya çıkan matrisin determinantıdır. (Bazı kaynaklarda bu terime 'minor' da denir)

Determinant Genel Formul

Özel olarak i 'yi 1 alırsak aşağıdaki formulu elde ederiz. Hesaplamalarımızda bu formulu kullanacağız.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını yukarıdaki formül ile hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} \\ &= 1M_{11} - 2M_{12} + 1M_{13} \end{aligned}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, determinantlarını yukarıda yerine yazarsak:

$$\det(A) = 0 - 2 \cdot 10 + 5 = -15$$

ör. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -4 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

Not: Verilen genel determinant formulüne dikkat edilirse bu formül rekürsiftir!!

Determinantın hesaplanması için başka determinantların hesaplanması gerekir. Cevabın içinde sorunun kendi vardır.

Rekürsif Determinant Kodu

```
function dett=detHesapla(A);  
    n=size(A,1);  
    if n==1  
        dett=A;%tek elemanli matrisin determinanti kendine esittir  
    else  
        toplam=0;  
        for j=1:n  
            M=A(2:end,setdiff(1:n,j));  
            toplam=toplam+(-1)^(j+1)*A(1,j)*detHesapla(M);  
        end  
        dett=toplam;  
    end  
end
```

Determinantın Özellikleri

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bir kare matris olsun.

Teorem 1: A 'nın tamamı 0'dan oluşan bir satırı varsa $\det(A) = 0$ olur.

Kanıt:

$i \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere diyelimki A 'nın i . satırının tamamı 0 olsun:

$\forall j \in \{1, \dots, n\} a_{ij} = 0$.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot 0 \cdot M_{ij} = 0$$

Teorem 2: A 'nın herhangi bir satırının k sayısı ile çarpımıyla bir B matrisi oluşsun. Bu halde

$$\det(B) = k \cdot \det(A)$$

olur.

Bu teoremin başka bir ifadesi şöyledir: bir matrisin bir satırı bir sayı ile çarpılırsa, bu matrisin determinanti da o sayı ile çarpılmış olur.

Kanıt:

$i \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere A 'nın i . satırını bir k sayısı ile çarparak, diğer satırlara dokunmayarak bir B matrisi elde edelim. Şu halde

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij} \quad (j \in \{1, \dots, n\})$$

olur.

$$\det(B) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} k \cdot a_{ij} M_{ij} = k \cdot \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = k \cdot \det(A)$$

Sonuç (Corollary) : $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$

Kanıt:

$n \times n$ boyutundaki bir matrisi k gibi bir sayıyla çarpmak, matrisin n satırının tamamını k ile çarpmak anlamına gelir. Her bir satır için matrisin determinanı k katına çıkacağından n satır için determinant k^n katına çıkar.

Teorem 3: Diyelimki A matrisinin i . satırı, B matrisinin i . satırı ile C matrisinin i . satırının toplamından oluşsun. Ayrıca B ve C matrislerinin i . satırı hariç diğer her satırı A ile aynı olsun. Bu durumda

$$\det(A) = \det(B) + \det(C)$$

olur.

Kanıt:

Eğer A matrisinin i . satırı, B matrisinin i . satırı ile C matrisinin i . satırının toplamından oluşuyorsa:

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \quad (j \in \{1, \dots, n\})$$

olur. Buradan:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} (b_{ij} + c_{ij}) M_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} (b_{ij}) M_{ij} + \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} c_{ij} M_{ij} \end{aligned}$$

$$\det(A) = \det(B) + \det(C)$$

Not: B ve C matrislerinin i . satırı hariç diğer her satırı A ile aynı olduğundan M_{ij} ($j \in \{1, \dots, n\}$) determinantları B ve C matrisleri için aynı olur.

Teorem 4: A 'nın herhangi bir satırını k sayısı ile çarpıp, bu satırı başka bir satıra eklersek A 'nın determinanı değişmez.

Kanıt: A matrisinin j . satırını bir k sayısı ile çarpıp bu satırı A matrisinin i . satırına ekleyelim. Ortaya çıkan yeni matrise B matrisi dersek, B matrisi şu formda olur: (R_i, i . satır)

$$B = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + kR_j \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Teorem 3'den B matrisinin determinanı asğıdaki iki matrisinin determinantlarının toplamıdır.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ kR_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrislerden ilki A matrisine eşittir. Dolayısıyla bu matrisin determinanı $\det(A)$ 'ya eşittir. İkinci matrisin determinanı ise Teorem 2'den dolayı k ile asğıdaki matrisin determinantının çarpımına eşittir:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matrisin tamamı aynı olan iki satırı bulundugundan bu matrisin determinanti 0 olur. O halde B matrisin determinanti

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(A) + k \cdot 0 \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

olur. Yani bir satirin bir sayi ile carpilarak baska bir satira eklenmesiyle ortaya cikan matrisin determinanti orijinal matrisin determinantina esit olur.

Teorem 5: A 'nın herhangi iki satırının yer değiştirilmesiyle B matrisi oluşsun. Bu durumda $\det(B) = -\det(A)$

olur.

(Yani bir matriste herhangi iki satır yer değiştirirse determinantın işareti değişir)

Kanıt: A matrisinin j . satırını i . satıra ekleyelim. Teorem 4'ten gördükki bu işlem sonucunda determinant değişmez. Yeni matris şöyle olur:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + R_j \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Bu matrisin i . satırını $(R_i + R_j)$ j . satırından (yani R_j den) çıkarırsak:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i + R_j \\ \dots \\ -R_i \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrisin j. satırını $(-R_i)$ i. satıra (yani $R_i + R_j$ ye) eklersek:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ -R_i \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Bu matrisin j. satırını $(-R_i)$, -1 ile carpılırsa determinant da -1 ile carpılmış olur ve su matris elde edilir:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_j \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Bu, A matrisinin i . ve j . satirlarinin yer degistilmis halidir. Bu matrisin determinanti $-\det(A)$ ya esit olur.

Sonuc: Bir matriste birbirinin ayni olan iki satir varsa determinant 0 olur.

Kanit: Diyelimki bir A matrisinin i . ve j . satirlari olsun. Bu iki satirin yer degistirilmesiyle B matrisi elde edilsin. Teorem 5'ten

$$\det(B) = -\det(A).$$

olur. Aynı zamanda i . ve j . Satirlar ayni oldugundan B matrisi, A matrisinin aynısıdır. Dolayisiyla

$$\det(B) = \det(A)$$

$\det(B)$ nin hem $-\det(A)$ ya hem de $\det(A)$ ya esit olmasi ancak $\det(A) = 0$ olmasiyla mumkun olur.

olur.

Teorem 6: A^T , A matrisin transpozu olmak uzere:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

dir. Yani bir matrisin transpozunun determinanti kendi determinantina esittir. Baska bir deyişle bir matrisin transpozu alinirsa determinant degismez.