

Matris Çarpımının Cebirsel Özellikleri

1. $A, m \times n$ boyutunda; $B, n \times k$ boyutunda ve $C, k \times l$ boyutunda matris olsun. Bu durumda aşağıda gösterilen birleşme özelliği sağlanır.

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

İspat:

Diyelim ki $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ gibi 2×2 matrisler olsunlar. Bu durumda

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{bmatrix}$$

olur. A ile $B \cdot C$ çarpılırsa:

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afl + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk & cej + cfl + dgj + dhl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk & cej + dgj + cfl + dhl \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\
&= (A \cdot B) \cdot C
\end{aligned}$$

2. $A, m \times n$ boyutunda; B ve C matrisleri, $n \times k$ boyutunda matrisler olsunlar. Bu durumda aşağıdaki şekilde carpmanın toplama üzerine soldan dağılma özelliği vardır:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

İspat:

Benzer şekilde diyelim ki $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ gibi 2×2 matrisler olsunlar. Bu durumda $B + C$:

$$= \begin{bmatrix} e + i & f + j \\ g + k & h + l \end{bmatrix}$$

olur. $A \cdot (B + C) =$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e + i & f + j \\ g + k & h + l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + ai + bg + bk & af + aj + bh + bl \\ ce + ci + dg + dk & cf + cj + dh + dl \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} ae + bg + ai + bk & af + bh + aj + bl \\ ce + dg + ci + dk & cf + dh + cj + dl \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ai + bk & aj + bl \\ ci + dk & cj + dl \end{bmatrix} \\
&= A \cdot B + A \cdot C
\end{aligned}$$

3. A ve B , $m \times n$ boyutunda; C , $n \times k$ boyutunda matrisler olsunlar. Bu durumda aşağıdaki şekilde carpmanın toplama üzerine sağdan dağılma özelliği vardır:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

İspat:

Alıştırma olarak bırakılmıştır.



BİL 1006

Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu

Hafta 8:
Lineer Denklem Sistemi Çözümü



Lineer Denklem Sistemi

Elimizde aşağıdaki gibi iki bilinmeyenli iki denklem olsun.

$$x_1 + x_2 = -1$$

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

Birinci denklemi -2 ile çarpıp ikinci denkleme eklediğimizde

$$x_2 = 2$$

olur. Bulunan x_2 değeri birinci yada ikinci denklemde yerine konulursa

$$x_1 = -3$$

elde edilir. Bulunan $(-3, 2)$ ikilisi sistemin çözümüdür.

Alternatif olarak bu denklem sistemini matris – vektör çarpımı olacak şekilde gösterebiliriz:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_b$$



Lineer Denklem Sistemi

Burada A ile gösterilen matrise katsayılar matrisi (coefficient matrix) denir. Sistemin çözümünün olup olmaması bu matrisinin tersinin olup olmamasına bağlıdır. Matrislerin tersini işlerken bu konuya tekrar döneceğiz.

Gauss eliminasyon methoduyla bir lineer denklemi çözerken genel yaklaşımımız ilk olarak katsayılar matrisi (A) ile sonuc vektörünü (b 'yi) birleştirerek genişletilmiş matris (augmented matrix) oluşturmaktır. Bu matrisi $[A \ b]$ olarak göstereceğiz.

Daha sonra bu matrisi başka matrislerle carparak üst ucgen matris haline getirmektir.

Ortaya cikan üst ucgen matrisi kullanarak en son degiskenden ilk degiskene dogru degiskenleri yerine koyma metodu ile buluruz.

$$\begin{array}{l} \text{ör. } 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 10 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 10 \end{array}} \right\} \text{Lineer denklem sistemini çözünüz.}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}}_b$$

A matrisi ile b 'yi birleştirerek genişletilmiş matris oluşturup, bu matrisi üst ucgen matris haline getireceğiz.

$$[A \ b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array} \right]$$

Bu matrisin üst ucgen olabilmesi için bu elemanların 0 olması gerekir.
(üst uçgen: $i > j$ iken $A_{ij} = 0$)

$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$ matrisinde 2. satır 1. sütundaki elemanı 0 yapmak için bu matrisi

soldan $E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile carparsak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 4 & 9 & -3 & | & 8 \\ -2 & -3 & 7 & | & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ -2 & -3 & 7 & | & 10 \end{bmatrix}$$

olur. Elde edilen matrister 3. satır 1. sütundaki elemanı 0 yapmak için bu matrisi soldan

$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi ile carparsak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ -2 & -3 & 7 & | & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 5 & | & 12 \end{bmatrix}$$



Son olarak elde edilen matrisin 3. satir 2. sutundaki elemanini 0 yapmak icin soldan

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisi ile carparsak:}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 5 & | & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix}$$

matrisi ust ucgen hale getirmis oluruz. Matrisin son satirindan:

$$4x_3 = 8$$

olup $x_3 = 2$ bulunur. Matrisin ikinci satirindan:

$$x_2 + x_3 = 4$$

olup, yukarida bulunan x_3 'un yerine konmasiyla

$$x_2 + 2 = 4$$

olur, buradan $x_2 = 2$ olur. Son olarak bulunan x_2 ve x_3 birinci denklemde yerine konulursa



$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$$

olup $x_1 = -1$ bulunur. Su halde $x = (-1, 2, 2)$ sistemin çözümüdür. Gerçekten de eğer bu vektor katsayılar matrisi A ile çarpılırsa b elde edilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}}_b$$

A, B ve C çarpılabilir üç matris iken $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ olduğunu görmüştük.

$[A \ b]$ genişletilmiş matrisini üst üçgen matris haline getirirken sırasıyla E_{21}, E_{31} ve E_{32} matrisleriyle çarpmıştık. Yukarıdaki teoremden

$$\left(E_{32} \left(E_{31} \left(E_{21} [A \ b] \right) \right) \right) = (E_{32} E_{31} E_{21}) [A \ b]$$

elde edilir. Yani öncelikle E_{32}, E_{31} ve E_{21} birbirleriyle çarpıp, ortaya çıkan çarpım matrisini $[A \ b]$ ile genişletilmiş matrisi ile çarparsak direk üst üçgen matris elde ederiz.

$$(E_{32}E_{31}E_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matris $[A \ b]$ ile çarpılırsa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 4 & 9 & -3 & | & 8 \\ -2 & -3 & 7 & | & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix}$$

Elementer Satır İşlemleriyle Lineer Denklem Sistemi Çözümü

Lineer denklem sistemlerini elementer satır işlemleriyle de çözebiliriz.

Elementer Satır İşlemleri (Elementary Row Operations)

- I. İki denklemin yerini değiştirmek: verilen bir lineer denklem sisteminde herhangi iki denklem birbirleriyle yer değiştirebilir. Notasyon olarak örneğin eğer i . denklem ile j . denklem yer değiştirmisse, bunu

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

ile göstereceğiz.



2. Bir denklemi bir sayı (bir skaler) ile çarpmak: verilen bir lineer denklem sisteminde herhangi bir denklemi herhangi bir sayı ile çarpabiliriz. Notasyon olarak eğer i . denklem k gibi bir skalerle çarpılmışsa bu,

$$R_i \leftarrow kR_i$$

ile gösterilir.

3. İki denklemi (biri skalerle çarpıp) toplayarak elde edilen yeni denklemi toplanan denklemlerden biri ile yer değiştirmek: sistemde herhangi iki denklemi skalelerle çarpıp (yada çarpmayıp) toplayabiliriz. Ortaya çıkan yeni denklemi toplama katılan denklemlerden birinin yerine yazabiliriz. Notasyon olarak diyelimki i . denklemi k sklaeriyle, j . denklemi ise m skaleriyle çarpıp iki denklemi toplayalım, ortaya çıkan denklemi j . denklemle yer değiştirelim. Bunu

$$R_j \leftarrow kR_i + mR_j$$

ile göstereceğiz.



Burada vurgulanması gereken asıl nokta, bahsedilen elemneter satır işlemleri sonucunda siteminin çözümünün değişmediğidir.

Satır Eşelon Form (Row Echelon Form)

Bir lineer denklem sistemi elementer satır işlemleri yardımıyla çözerken, bu işlemleri kullanarak genişletilmiş matrisi $[A \ b]$ 'satır eşelon form' a getiririz. Bu kavramı anlamak öncelikle pivot kavramının tanımını yapalım.

Pivot (Öncü Eleman)

Matriste bir satırın pivotu o satırda 0'dan farklı ilk elemandır.

ör.
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Pivotlar

Satır Eşelon Form (Row Echelon Form)

Bir matrisin satır eşelon formda olması için şu şartların tamamını sağlaması gerekir:

1. Her pivot bir önceki satırın pivotunun altında ve sağında yer almalıdır.
2. Pivotların altı 0 yapılmalıdır.
3. Matriste tamamı 0'dan oluşan elemanlar matrisin en altında yer almalıdır.

Not: Satır eşelon formda genelde pivotlar 1 yapılır.

ör. Satır eşelon formda olan matris örnekleri

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



ör.Aşağıdaki lineer denklem sistemini genişletilmiş katsayılar matrisini elementer satır işlemleriyle satır eşelon forma getirerek çözünüz.

$$3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5$$

$$3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9$$

$$3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 15$$

ccc

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & | & 15 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3 \equiv \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & | & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & | & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_3 \equiv \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & | & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & | & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & | & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftarrow 3R_2 \\ R_3 \leftarrow 2R_3 \end{matrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & | & 15 \\ 0 & 6 & -12 & 12 & 6 & | & -18 \\ 0 & 6 & -12 & 12 & 8 & | & -10 \end{bmatrix}$$



$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \quad \equiv \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 6 & -12 & 12 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right]$$

$$R_1 \leftarrow R_1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 \cdot \frac{1}{2} \quad \equiv \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Yukarıda satır eşolon forma gelmiş matristen:

$$x_5 = 4$$

$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = -3$$

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5$$



$x_5 = 4$, ikinci ve ucuncu denklemde yerine konulursa:

$$\begin{aligned}x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -7 \\x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -3\end{aligned}$$

elde edilir. Birinci denklemde x_2 yalnız bırakılırsa:

$$x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4$$

olur. Bu değer ikinci denklemde yazılırsa:

$$\begin{aligned}x_1 - 3(-7 + 2x_3 - 2x_4) + 4x_3 - 3x_4 &= -3 \\x_1 &= 2x_3 - 3x_4 - 24\end{aligned}$$

olur. Sistemin çözüm kümesi:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2x_3 - 3x_4 - 24 \\x_2 &= -7 + 2x_3 - 2x_4 \\x_5 &= 4\end{aligned}$$

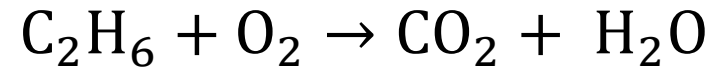
Burada x_3 ve x_4 bağımsız değişkendir, her değeri alabilir. x_1 ve x_2 bağımlı değişkendir, x_3 ve x_4 'e bağımlıdır. Örneğin, x_3 ve x_4 'ü 1 alırsak, $x_1 = -25$, $x_2 = -7$, olur. $(-25, -7, 1, 1, 4)$ sistemin bir çözümü olur. x_3 ve x_4 'ü



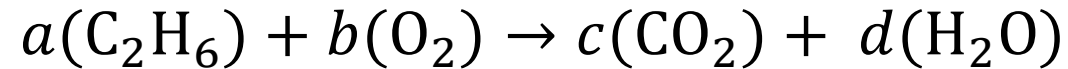
x_3 ve x_4 'e farklı değerler vererek sonsuz çözüm elde edebiliriz.

ör. Lineer denklem sisteminin bir uygulaması olarak kimyasal tepkimeleri düşünebiliriz. Genel olarak bir kimyasal tepkimede tepkimeye giren molekül sayısı ile tepkimeden çıkan molekül sayıları aynı olmak zorundadır.

Buna göre aşağıda gösterilen kimyasal tepkimede tepkimeye giren ve çıkan moleküller hangi oranda alınmalıdır?



Çözüm.



Denkleme giren karbon sayıları eşit olmak zorunda olduğundan: $2a = c$

Denkleme giren hidrojen sayıları eşit olmak zorunda olduğundan: $6a = 2d$

Denkleme giren oksijen sayıları eşit olmak zorunda olduğundan: $2b = 2c + d$



Buradan aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$2a - c = 0$$

$$6a - 2d = 0$$

$$2b - 2c - d = 0$$

Denklem sistemine ait genişletilmiş katsayılar matrisini elementer satır işlemleriyle satır eşelon forma getirelim.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad R_2 \leftarrow -3R_1 + R_2 \quad \equiv \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \equiv \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Satır eşelon forma getirilmiş matrisin son satırından:

$$3c - 2d = 0$$

$$c = \frac{2d}{3}$$



Buradan aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$2a - c = 0$$

$$6a - 2d = 0$$

$$2b - 2c - d = 0$$

Denklem sistemine ait genişletilmiş katsayılar matrisini elementer satır işlemleriyle satır eşelon forma getirelim.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad R_2 \leftarrow -3R_1 + R_2 \quad \equiv \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \equiv \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Satır eşelon forma getirilmiş matrisin son satırından:

$$3c - 2d = 0$$

$$c = \frac{2d}{3}$$



Satır eşelon forma getirilmiş matrisin ikinci satırından:

$$2b - 2c - d = 0$$

$$b = \frac{7d}{6}$$

Satır eşelon forma getirilmiş matrisin birinci satırından:

$$2a - c = 0$$

$$a = \frac{d}{3}$$

Burada d bağımsız değişkendir; a , b ve c değişkenleri ise d 'ye bağlı bağımlı değişkenlerdir.

$$\begin{bmatrix} d/3 \\ 7d/6 \\ 2d/3 \\ d \end{bmatrix} \text{ sistemin çözümüdür.}$$



Lineer Denklem Sisteminin Çözümünün Varlığı

Elimizde iki bilinmeyenli iki denklem olsun:

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

Bu denklemler $\mathbb{R}^2$ de birer doğru ile gösterilebilirler. Bu doğruların birbirlerine göre 3 durumu vardır. Bu 3 duruma göre sistemin çözümünün var olup olmadığından söz edebiliriz.

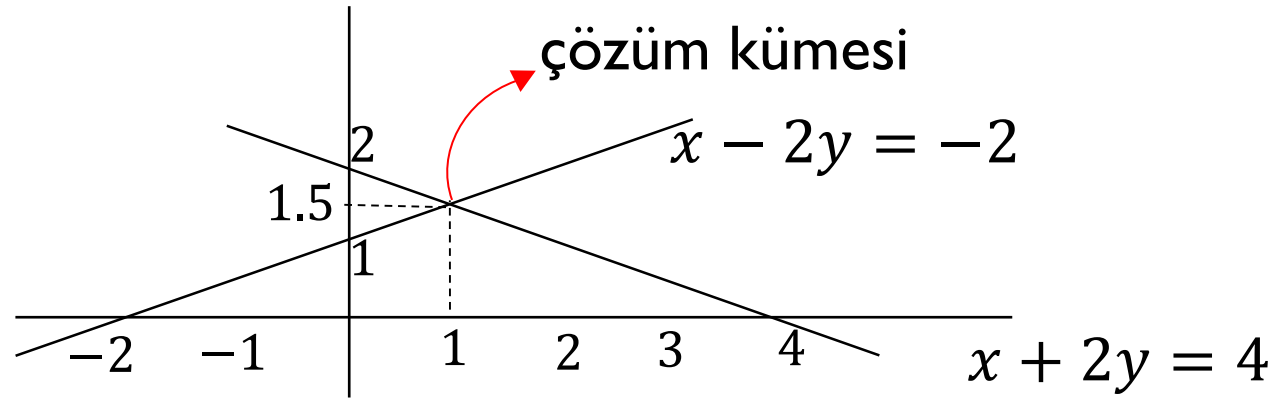
I. İki doğru tek bir noktada kesişebilir. Bu durumda sistem tutarlıdır (consistent) ve sistemin tek bir çözümü vardır. Denklemler birbirinden bağımsızdır (birbirlerinden türetilemezler).

ör. $x - 2y = -2$ ve $x + 2y = 4$ olarak verilen lineer denklem sisteminin çözümünün var olup olmadığına bakalım.

$x - 2y = -2$ denkleminin doğrusu $(0,1)$ ve $(-2,0)$ noktalarından geçer.

$x + 2y = 4$ denkleminin doğrusu $(0,2)$ ve $(4,0)$ noktalarından geçer.





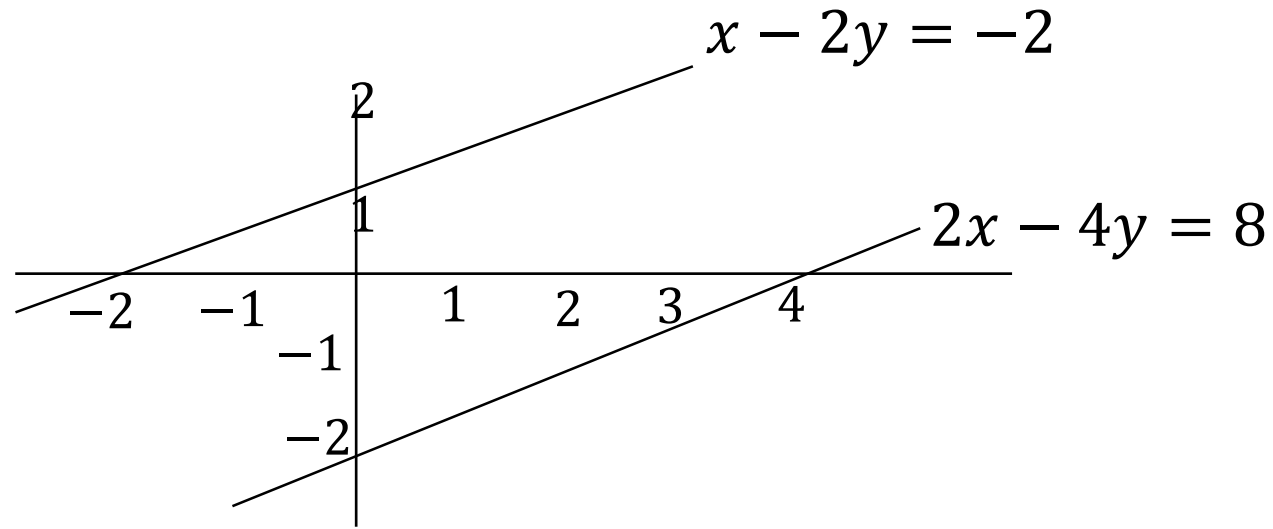
Sistemin çözüm kümesi doğruların kesişme noktasıdır.

2 . İki doğru hiçbir noktada kesişmez. Bu durumda doğrular birbirine paraleldir. Sistem tutarsızdır (inconsistent). Çözüm yoktur.

ör. $x - 2y = -2$ ve $2x - 4y = 8$ olarak verilen lineer denklem sisteminin çözümünün var olup olmadığına bakalım.

$x - 2y = -2$ denkleminin doğrusu $(0,1)$ ve $(-2,0)$ noktalarından geçer.

$2x - 4y = 8$ denkleminin doğrusu $(0,-2)$ ve $(4,0)$ noktalarından geçer.



Doğrular
birbirine
paralel.
Çözüm yok.

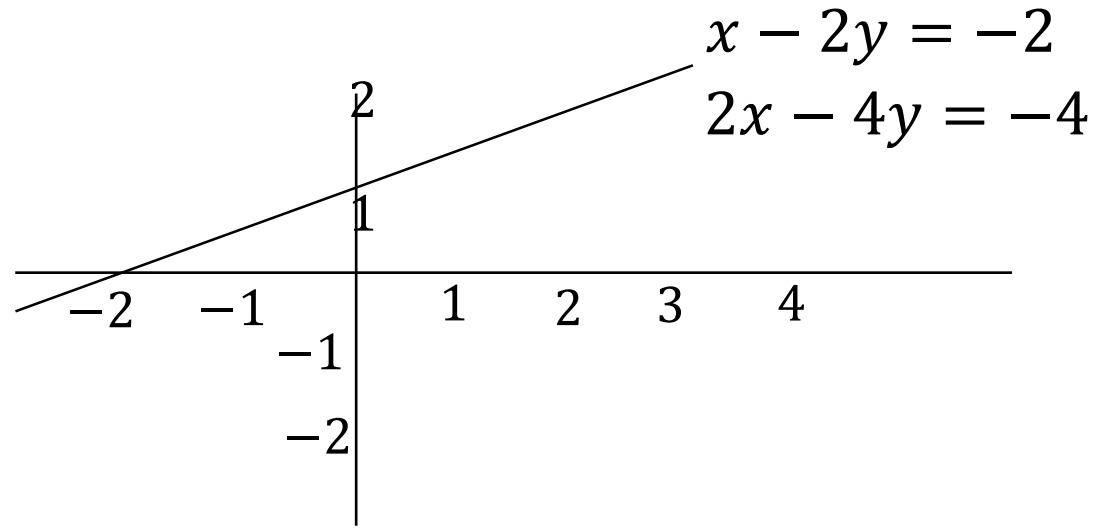
3 . İki doğru her noktada kesişir. Bu durumda doğrular çakışır. Sistemin sonsuz çözümü vardır. Denklemler birbirinden elde edilmiştir. Denklemler birbirlerine bağımlıdır.

ör. $x - 2y = -2$ ve $2x - 4y = -4$ olarak verilen lineer denklem sisteminin çözümünün var olup olmadığına bakalım.

$x - 2y = -2$ denkleminin doğrusu $(0,1)$ ve $(-2,0)$ noktalarından geçer.

$2x - 4y = -4$ denkleminin doğrusu $(0,1)$ ve $(-2,0)$ noktalarından geçer.

Dolayısıyla bu iki doğru tam olarak çakışır.



Tek bir doğru var. Bu doğru üzerindeki her nokta sistemin çözümüdür. Dolayısıyla sonsuz çözüm vardır.