

BİL 1006

Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu

Hafta 6:
Matrisler II

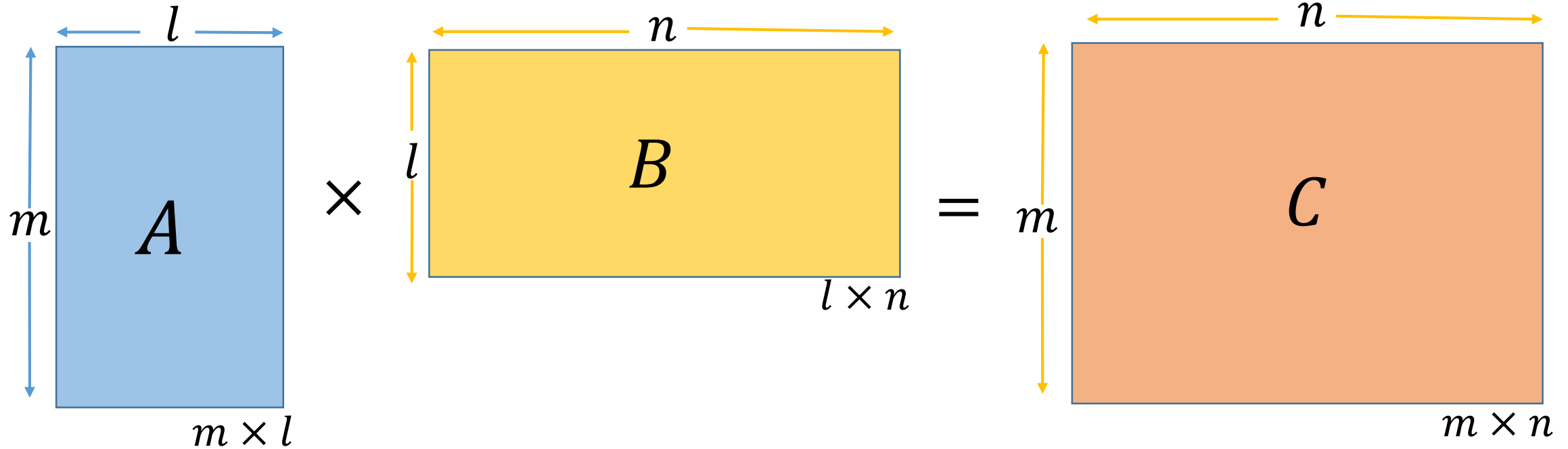


MATRİS – MATRİS ÇARPIMI

İki matrisin carpilabilir olması için birinci matrisin sutun sayisi ile ikinci matrisin satir sayisi eşit olmalıdır.

$A \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ve $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ iki matris olsun. Bu matrisler carpilabilir. Çünkü A 'nın l tane sutunu vardır ve bu sayı B 'nin satir sayisi olan l 'ye esittir.

Bu iki matrisin carpimiyla ortaya cikan C matrisi $m \times n$ boyutundadır.



MATRİS – MATRİS ÇARPIMI

Çarpım Kural: $A \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ve $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ iken $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, in j . sütunu ($j \in \{1, \dots, n\}$)

A matrisinin kendisi ile B matrisinin j . sütununun matris - vektör çarpımıdır.

Diyelimki $C_{.j}$; C matrisinin j . sütununu gösterebiliriz. Şu halde

$$C_{.j} = A \cdot B_{.j}$$

olur.

MATLAB Kodu

```
[m,l]=size(A);  
[l,n]=size(B);  
C = zeros(m,n);  
for j = 1:n %sutunlari tarıyoruz  
    C(:,j) = A*B(:,j);  
end
```



Yukarıdaki MATLAB koduna dikkat edilirse $A*B(:,j)$ çarpımı bir matris – vektör çarpımıdır. Bu çarpımı A 'nın satırlarını B 'nin j . kolonu ile çarparak yapabiliriz. Bu çarpımların her birine karşılık C 'nin j . kolonun bir elemanı karşılık gelir.

Kod yeniden düzenlenirse:

```
[m,l]=size(A);  
[1,n]=size(B);  
C = zeros(m,n);  
for j = 1:n %sutunlari tarıyoruz  
    for i = 1:m %satırlari tarıyoruz  
        C(i,j)= A(i,:)*B(:,j);  
    end  
end
```

Sonuç: C_{ij} yani C 'nin i . satirinin j . kolonu A 'nın i . satırı ile B 'nin j . sutunun çarpımı ile bulunur.



ör.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 2} =$$

$$\left[\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right]_{4 \times 2}$$

çarpımın 1. sütunu

çarpımın 2. sütunu



$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc}
 \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} & & & & \\
 \hline
 \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} & & & & \\
 \hline
 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} & & & & \\
 \hline
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc}
 \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} & & & & \\
 \hline
 \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} & & & & \\
 \hline
 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} & & & & \\
 \hline
 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -3 \cdot -1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot -1 & -3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\
 0 \cdot -1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + -1 \cdot -1 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + -1 \cdot 1 \\
 2 \cdot -1 + -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot -1 & 2 \cdot 0 + -2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$



ör. Diyelim ki A ve B gibi iki üniversite olsun. A üniversitesi 25 monitor, 5 lazer yazıcı ve 20 projeksiyon cihazı alacak olsun. B üniversitesi ise 35 monitor, 3 lazer yazıcı ve 15 projeksiyon cihazı alacak olsun. Ayrıca 2 tane satıcı olsun. Birinci satıcıda monitor, lazer yazıcı ve projeksiyon cihazlarının birim fiyatı sırasıyla 1286 TL, 399 TL 1110 TL; ikinci satıcıda bu ürünlerin birim fiyatı sırasıyla 1210, 380 ve 1216 TL dir.

Bu durumda hangi üniversite hangi satıcıdan ürünleri satın almalıdır?

Çözüm.

Üniversite – ürün matrisi:

	Monitör	L.Yazıcı	Projeksiyon
Üniversite A	25	5	20
Üniversite B	35	3	15

uni x ürün

Ürün – satıcı matrisi:

	Satıcı 1	Satıcı 2
Monitör	1286	1210
L.Yazıcı	399	380
Projeksiyon	1110	1216

ürün x satıcı

(Üniversite – ürün matrisi) x (Ürün – satıcı matrisi) =

	Satıcı 1	Satıcı 2
Üniversite A	56345	56470
Üniversite B	62857	61730

uni x satıcı



Özel Matris – Matris Çarpımları

1. İki Reel Sayının Çarpımı

$A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ve $B \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ iken $A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ olur. Yani iki reel sayının çarpımı aslında 1×1 boyutlu iki matrisin çarpımına eşittir.

$$1 \overbrace{\boxed{A}}^1 \times 1 \overbrace{\boxed{B}}^1 = 1 \overbrace{\boxed{C}}^1$$

2. İki Vektörün İç Çarpımı (Nokta Çarpım)

$A \in \mathbb{R}^{1 \times l}$ 1 satıra l sütuna sahip bir matris ve $B \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ l satıra 1 sütuna sahip bir matris olsun. Bu durumda $A \cdot B$ matrisi 1×1 boyutlu olur. Hatta bu çarpım A ve B matrislerinin iç çarpımıdır.

$$1 \overbrace{\boxed{A}}^l \times \underbrace{l}_{\substack{1 \\ B}} = 1 \overbrace{\boxed{C}}^1$$



Özel Matris – Matris Çarpımları

3. Vektör – Skaler Çarpımı

$A \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ve $B \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ iken $A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ olur. Bu daha önce gördüğümüz vektör- skaler çarpımıdır, vektörün elemanlarının skalerle carpılmasıyla elde edilir.

$$\begin{matrix} & 1 \\ & \text{---} \\ m \left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] & \times 1 \left[\begin{array}{c} B \end{array} \right] & = & m \left[\begin{array}{c} C \end{array} \right] \\ & & & & 1 \\ & & & & \text{---} \end{matrix}$$

4. Matris – Vektör Çarpımı

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ iken $A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ olur. Bu daha önce gördüğümüz matris – vektör çarpımıdır.

$$\begin{matrix} & n \\ & \text{---} \\ m \left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] & \times & n \left[\begin{array}{c} B \end{array} \right] & = & m \left[\begin{array}{c} C \end{array} \right] \\ & & & & 1 \\ & & & & \text{---} \end{matrix}$$

Matris – Matris Çarpımının Maliyeti

$A \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ve $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ matrisler olsun. $A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin i . satırının j . elemanı C_{ij} ; A 'nın i . satırı ($A_{i.}$) ile B 'nin j . sütununun ($B_{.j}$) iç çarpımından oluşur.

$$C_{ij} = \boxed{A_{i.}} \times \boxed{B_{.j}}$$

Bu iç çarpım l tane çarpımın toplamından oluşur. O halde bu iç çarpım için $2 \cdot l$ tane işlem gerekir (iç çarpımın maliyeti $2 \cdot l$ dir).

C matrisinin her bir bileşenini hesaplamak için $2 \cdot l$ tane işlem yapmak gerekidir.

C matrisinin toplam bileşen sayısı $m \cdot n$ dir. O halde C matrisini hesaplamak için gereken işlem sayısı:

$$2 \cdot l \cdot m \cdot n$$

olur.



Matris ile Tranpozunun Carpimi

Bir matris ile bu matrisin transpozu carpildiginda matris ne olursa olsun kare ve simetrik bir matris elde edilir.

Bunu kolayca gösterebilmek icin ornek olarak 3 satirdan olusan bir A matrisini alalim ve bu matrisin satirlarini $R1$, $R2$ ve $R3$ ile gösterelim.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} R1 & \text{---} \\ R2 & \text{---} \\ R3 & \text{---} \end{bmatrix} \\ A \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{matrix} R1 & R2 & R3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} | & | & | \end{bmatrix} \\ A^T \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} R1R1 & R1R2 & R1R3 \\ R2R1 & R2R2 & R2R3 \\ R3R1 & R3R2 & R3R3 \end{bmatrix} \\ AA^T \end{array}$$

Bir matrisin transpozu ile kendinin çarpımını göstermek için örnek olarak 3 sütundan oluşan bir A matrisini alalım ve bu matrisin sütunlarını $K1$, $K2$ ve $K3$ ile gösterelim.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} K1 & \text{---} \\ K2 & \text{---} \\ K3 & \text{---} \end{bmatrix} \\ A^T \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{matrix} K1 & K2 & K3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} | & | & | \end{bmatrix} \\ A \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} K1K1 & K1K2 & K1K3 \\ K2K1 & K2K2 & K2K3 \\ K3K1 & K3K2 & K3K3 \end{bmatrix} \\ A^T A \end{array}$$



Matris – Matris Çarpımının Transpozu

Teorem: $A \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ve $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ matrisler olsun. Bu durumda

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

olur. Yani çarpımın transpozu; çarpanların transpozlarının çarpımına eşittir.

İspat:

İki matrisin eşit olması demek matrislerin tüm bileşenlerinin aynı olması demektir. Buradan hareketle eşitliğin her iki tarafındaki matrislerin eşit olduğunu ispatlamak için eşitliğin bir tarafındaki matrisin herhangi bir bileşenini ele alalım. Bu i . satır j . sütuna denk gelen bileşen olsun.

$(AB)^T_{ij}$, transpozu olan AB matrisinin j . satırının i . sütunundaki bileşene eşittir:

ise A matrisinin j . satırının B 'nin i . sütunu ile çarpımından elde edilir.

A matrisinin j . satırı, A^T matrisinin j . sütunu; B matrisinin i . sütunu B^T matrisinin i . satırıdır.

Şu halde bu bileşen B^T matrisi ile A^T matrisinin i . satırının j . sütunundaki bileşene eşittir.



Birim (Identity) Matris ile Çarpım

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bir matris $I_n, n \times n$ birim matris olsun. Bu durumda

$$A \cdot I_n = A$$

$$I_n \cdot A = A$$

olur. Yani birim matris matris-matris çarpımının etkisiz elemanıdır.

ör.
$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \times \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$



Aşağıdaki matris – vektör carpimlerini yapınız.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$



Dış Çarpım (Outer Product) (Cross Product)

Dış çarpım, iki vektörü çarpmanın bir başka türüdür.

u, m – boyutlu bir sütun vektörü olsun ($u \in R^{m \times 1}$).

v, n – boyutlu bir satır vektörü olsun ($v \in R^{1 \times n}$).

Şu halde $u \cdot v$ bir dış çarpımdır ve bu çarpım sonucunda $m \times n$ boyutunda bir matris oluşur.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}_{m \times 1}, v = [v_1, v_2, \dots, v_n]_{1 \times n} \quad \text{vektörlerinin dış çarpımı:}$$

$$u \cdot v = \begin{bmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 & \dots & u_1 \cdot v_n \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 & \dots & u_2 \cdot v_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_m \cdot v_1 & u_m \cdot v_2 & \dots & u_m \cdot v_n \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Dış Çarpım (Outer Product) (Cross Product)

ör. $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}_{4 \times 1}, v = [4, 2]_{1 \times 2}$ vektörlerinin dış çarpımı:

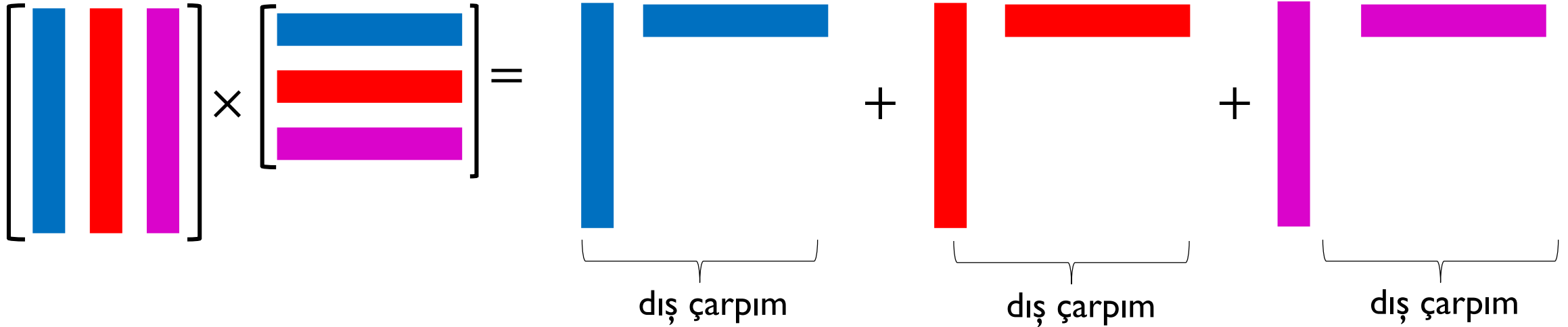
$$u \cdot v = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot -2 \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 4 & 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & -2 \\ 0 & 0 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

Dış Çarpımın Özellikleri

1. Dış çarpım sonucunda iç çarpımın aksine sayı değil bir matris oluşur.
2. Vektörlerin dış çarpımı yapılırken vektörlerin aynı boyutlu olması zorunlu değildir. Herhangi iki vektörün dış çarpımı her zaman mevcuttur.

Matris – Matris Çarpımının Vektör Dış Çarpımıyla Yapılması

A 'nın sütunları ile B 'nin satırlarını sıra ile dış çarpım ile çarpıp ortaya çıkan matrisleri toplayarak $A \cdot B$ matris çarpımını elde edebiliriz.


$$\begin{bmatrix} \text{blue column} & \text{red column} & \text{magenta column} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{blue row} \\ \text{red row} \\ \text{magenta row} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{blue column} \\ \text{blue row} \end{bmatrix}}_{\text{dış çarpım}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \text{red column} \\ \text{red row} \end{bmatrix}}_{\text{dış çarpım}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \text{magenta column} \\ \text{magenta row} \end{bmatrix}}_{\text{dış çarpım}}$$

Formal olarak:

$A_1, A_2, \dots, A_l$ A 'nın sütunlarını gösterebilir. $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_l$ B 'nin satırlarını gösterebilir.

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \dots \\ \tilde{B}_l \end{bmatrix} = [A_1 \ \tilde{B}_1] + [A_2 \ \tilde{B}_2] + \dots + [A_l \ \tilde{B}_l]$$

ör.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 2} =$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -3 \cdot -1 & -3 \cdot 0 \\ 0 \cdot -1 & 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot -1 & 2 \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 & 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 & 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \cdot -1 & 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot -1 & -1 \cdot 1 \\ 0 \cdot -1 & 0 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



MATLAB Kodu

Birinci matrisin sütunlarını, ikinci matrisin satırlarını gezmek için bir değişkene ihtiyacımız var. Bu i değişkeni olsun.

i değişkeninin her değeri için birinci matrisin bir sütunu ile ikinci matrisin bir satırı dış çarpılır.

Bu dış çarpım sonucunda bir matris oluşur. Elde edilen matris bir önce elde edilen matrise eklenerek çarpım güncellenir.

```
[m,1]=size(A) ;  
[1,n]=size(B) ;  
C = zeros(m,n) ;  
for i = 1:1 %sutunlari tarıyoruz  
    C = C + A(:,i)*B(i,:) ;  
end
```