

BİL 1006

Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu

Hafta 5:
Matrisler I



MATRİSLER

$m \times n$ boyutunda bir matris, m satır ve n sütun dan oluşan dikdörtgen bir vektördür.

ör. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi 2 satırdan ve 3 sütündan oluşur. O halde bu matris 2×3 boyutunda bir matristir.

ör. $B = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 1 & -0.4 \\ 0 & 77 \end{bmatrix}$ matrisi 3 satırdan ve 2 sütündan oluşur. O halde bu matris 3×2 boyutunda bir matristir.

Not: Küçük harfle gösterilen vektörlerin aksine matrisler büyük harfle gösterilir.

Matrisin Bileşenlerini Göstermek

A , $m \times n$ boyutunda bir matris olsun. A matrisinin i . satırının ($i \in \{1, \dots, m\}$), j . sütunundaki ($j \in \{1, \dots, n\}$) elemanını A_{ij} ile göstereceğiz.



ör. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi için A_{13} yani 1. satır, 3. sütündeki bileşen -1 dir.

$$A = \begin{matrix} & \xrightarrow{j} & j \text{ sütunları tarıyor} \\ \begin{matrix} \downarrow i \\ i \end{matrix} & \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]_{m \times n} \\ & i \text{ satırları tarıyor} \end{matrix}$$

Matrislerin MATLAB Gösterimi

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi MATLAB da **A= [4,2,-1;0,6,5]** komutuyla yazılır (dikkat edilirse alt satıra noktalı virgül ile geciliyor.

A matrisinin i . satırın j . elemanı **A(i,j)** komutuyla çağırılır.

A matrisinin i . satırının tamamı :**A(i,:)** ile çağırılır.

A matrisinin j . sütunun tamamı:**A(:,j)** ile çağırılır.



MATRİS ÖRNEKLERİ

ör. Ali 3kg elma, 4.5 kg muz ve 1 kg domates alsın. Bülent 1 kg elma, 0 kg muz ve 6 kg domates alsın. Ceyda 2.5 kg elma, 4 kg muz ve 1 kg domates alsın. Bu durumda herbir kişinin aldıkları bir satıra yazılarak oluşturulan matris aşağıdaki gibi olur:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 4.5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2.5 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

satırlar kişilere
karşılık geliyor

sütunlar ürünlere
karşılık geliyor

ör.

	Adana	Mersin	Sivas	Kayseri	Ankara
Adana	0	69	423	325	492
Mersin	69	0	491	328	485
Sivas	423	491	0	194	439
Kayseri	325	328	194	0	318
Ankara	492	485	439	318	0

Şehirler arası
uzaklığı gösteren
tablo bir matris
örneğidir.



ör. Görüntü işleme. Siyah beyaz resimler bilgisayar ortamında işlendiğinde $m \times n$ boyutunda bir matris elde edilir. Bu matrisin her bir bileşeni bir pikseldir ve 0-255 arası bir değer alır. Burada 0'dan 255'e doğru gidildikçe pikselin koyuluk değeri azalır (0: siyah piksel, 255 beyaz piksel).



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	87	88	88	89	90	91	91	92	93	93	94	95	96	96
2	88	88	89	90	90	91	92	92	93	94	94	95	96	97
3	89	89	89	90	91	92	92	93	94	94	95	96	97	97
4	89	90	90	91	92	93	93	94	95	95	96	97	98	98
5	90	91	91	92	93	94	94	95	96	96	97	98	99	99
6	91	92	92	93	94	95	95	95	97	97	98	99	99	100
7	92	92	93	94	94	95	96	96	98	98	99	99	100	101
8	92	93	93	94	95	96	96	97	98	98	99	100	100	101
9	94	94	95	95	95	96	96	96	99	99	99	100	100	100
10	95	95	95	95	96	96	96	97	99	99	99	100	100	100
11	95	95	96	96	96	97	97	97	99	99	99	100	100	100
12	96	96	97	97	97	98	98	98	99	99	99	100	100	100
13	97	97	98	98	98	99	99	99	99	99	99	100	100	100
14	98	98	98	99	99	100	100	100	99	99	99	100	100	100
15	99	99	99	99	100	100	101	101	99	99	99	100	100	100
16	99	99	99	100	100	101	101	101	99	99	99	100	100	100
17	99	99	99	100	100	100	101	101	100	100	100	101	101	101
18	99	99	99	100	100	100	101	101	100	100	101	101	101	102

Matrisin her bir bileşeni karşılık geldiği pikselin siyah yoğunluğunu sayısal olarak gösteriyor.

MATRİS SKALER ÇARPIMI

Bir matris bir skalarla carpilirken, matrisin bütün bileşenleri skalerle çarpılır.

ör. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ matrisini 2 skaleriyle çarparsak:

$$2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot -1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 6 & 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 0 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

MATLAB'ta Matris Skaler Çarpımı

$m \times n$ boyutundaki A matrisini k skaleriyle çarparken **$k \cdot A$** komutunu girmemiz yeterlidir. Alternatif olarak bu çarpımı içiçe iki for loop kullanarak yapabiliriz.

```
for i=1:m % bu for satırları tarıyor
    for j=1:n % bu for sutunlari tarıyor
        A(i,j)= k*A(i,j);
    end
end
end
```



MATRİSLERİN TOPLANMASI

Aynı boyutlu iki matris toplanırken karşılıklı bileşenler toplanır.

ör. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ matrisi ile $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ matrislerini toplayalım.

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 - 1 & 2 + 3 & -1 + 0 \\ 0 + 3 & 6 + 5 & 5 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 3 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

MATLAB'ta Matrislerin Toplanması

$m \times n$ boyutundaki A ve B matrislerini MATLAB'ta toplarken **A+B** komutunu girmemiz yeterli.dir Alternatif olarak bu çarpımı içiçe iki for loop kullanılarak yapılabiliriz.

```
Z=zeros(m,n); % bu toplamın matrisi olacak
```

```
for i=1:m % bu for satırları tarıyor
```

```
    for j=1:n % bu for sutunlari tarıyor
```

```
        Z(i,j)= A(i,j)+B(i,j);
```

```
    end
```

```
end
```

ÖZEL MATRİSLER

1. Kare Matris

Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise kare matris denir.

Formal olarak $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n satıra ve n sütuna sahip bir kare matristir.

ör. Kare matrisler:



4 × 4 kare
matris

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 4.5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2.5 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 3 & 4.5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2.5 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} 3 \times 3 \text{ kare} \\ \text{matris} \end{array}$$

2. Üst Üçgen Matris

Bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinde eğer $i > j$ için $A_{ij} = 0$ oluyorsa bu matrise üst üçgen matris diyeceğiz.

2. Üst Üçgen Matris

Başka bir deyişle üst üçgen matriste satır indisi, sütun indisinden büyük olan bütün bileşenler 0 dır.

ör. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4.5 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4.5 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Alt Üçgen Matris

Bir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinde eğer $j > i$ için $A_{ij} = 0$ oluyorsa bu matrise alt üçgen matris diyeceğiz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$



Matrislerin Ust Uçgen Matris Olup Olmadığını Kontrol Eden MATLAB Fonksiyonu I

```
function bool = ustUcgenMi (A)
%eger matris ust ucgen ise satir indisi sutun indisinden %buyuk
%iken bileşenlerin tamamı 0 olmalıdır.
[m,n]=size(A); % A'nın satir sayisi m, sutun sayisi n
bool=true; %default olarak ust ucgen oldugunu varsaydik
for i = 1:m
    for j = 1:n
        if i>j
            if A(i,j)~=0 %i, j'den buyuk iken A(i,j) ler 0 olmalı
                bool = false;
            end
        end
    end
end
end
```



Matrislerin Ust Uçgen Matris Olup Olmadığını Kontrol Eden MATLAB Fonksiyonu 2

```
function bool = ustUcgenMi2(A)
%bu fonksiyonda yalnızca i>j olan indisleri kontrol ediyoruz.
m=size(A,1);% A'nin satir sayisi m
bool=true; %default olarak ust ucgen oldugunu varsaydik
for i = 2:m
    for j = 1:i-1% hangi sutuna gidecegimiz hangi satirda oldugumuza bagli
        if A(i,j)~=0 %i, j'den buyuk iken A(i,j) ler 0 olmalı
            bool = false;
        end
    end
end
end
```



Matrislerin Alt Üçgen Matris Olup Olmadığını Kontrol Eden MATLAB Fonksiyonu

```
function bool = altUcgenMi (A)
%bu fonksiyonda yalnızca j>i olan indisleri kontrol ediyoruz.
m=size(A,1);% A'nin satir sayisi m
bool=true; %default olarak ust ucgen oldugunu varsaydik
for i = 1:m-1
    for j = i+1:n% hangi sutuna gidecegimiz hangi satirda oldugumuza bagli
        if A(i,j)~=0 %j, i'den buyuk iken A(i,j) ler 0 olmalı
            bool = false;
        end
    end
end
end
```



4. Diagonal Matrix

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bir matris olsun. Eger $i \neq j$ için $A_{ij} = 0$ oluyorsa A matrisine diagonal matris denir.

ör. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 3×3 diagonal matris. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Not: Diagonal matrisler hem üst üçgen hem de alt üçgen matristir.

5. Birim Matris (Identity Matrix)

Tüm diagonal elemanları 1 olan diagonal matrise birim matris denir.

Birim matrisler I_n ile gösterilirler. n burada matriste kac satır yada kac sutun oldugunu gosterir.

ör. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



Matrisin Transpozunu Almak

Bir matrisin transpozu matrisin satırları sütun yapılarak elde edilir. Bu, aslında sütunların satır yapılmasına denktir.

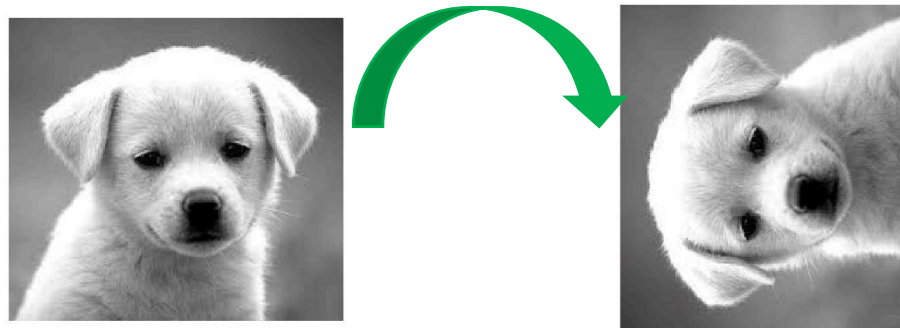
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

Formal olarak $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bir matris olsun. Bu matrisin transpozu $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ olur.

Ayrıca $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ve $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ için $A_{ij} = A_{ji}^T$.

ör. `>>dogMatrix = imread('dog.jpg');`

`>>imshow(dogMatrix');`



5. Simetrik Matris

Transpozu kendine eşit olan matrise simetrik matris denir.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bir simetrik matris olsun. A 'nın transpozu $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ A 'ya eşit olur.

Bu durumda $m = n$ olmak zorundadır. Bu ise simetrik matrisin aynı zamanda kare matris olmasını gerektirir. Yani satır sayısı sütun sayısına eşit olmak zorundadır.

Formal olarak $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bir kare matris olsun. Bu matris simetrik ise $A_{ij} = A_{ji}$ olur. ($i, j \in \{1, \dots, n\}$).

ör.

	Adana	Mersin	Sivas	Kayseri	Ankara
Adana	0	69	423	325	492
Mersin	69	0	491	328	485
Sivas	423	491	0	194	439
Kayseri	325	328	194	0	318
Ankara	492	485	439	318	0



Matris – Vektör Çarpımı

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \times n$ boyutunda bir matris ve $v \in \mathbb{R}^n$ n boyutunda bir vektör olsun.

Bu durumda A matrisi ile v vektörünün çarpımıyla oluşan Av vektörü m boyutlu olur, ve aşağıdaki şekillerde hesaplanır.

I. Satırlar ile Vektörü Çarpmak

Diyelimki A matrisi 3 tane satırdan oluşsun ve v vektörü A 'nin satırlarıyla aynı boyutta bir vektör olsun.

A 'nin satırlarını 1,2 ve 3 ile, v vektörünü 4 ile numaralandıralım.

$$\begin{bmatrix} \text{---} & 1 \\ \text{---} & 2 \\ \text{---} & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & 1 & | & 4 \\ \text{---} & 2 & | & 4 \\ \text{---} & 3 & | & 4 \end{bmatrix}$$

İç çarpım

İç çarpım

İç çarpım

Matris – Vektör Çarpımı

$$\text{ör. } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} [1 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [-1 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [2 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [6 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \\ 13 \end{bmatrix}_{5 \times 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \langle (1,3), (2,1) \rangle \\ \langle (-1,4), (2,1) \rangle \\ \langle (2,2), (2,1) \rangle \\ \langle (0,0), (2,1) \rangle \\ \langle (6,1), (2,1) \rangle \end{bmatrix}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \\ 13 \end{bmatrix}_{5 \times 1}$$



Matris – Vektör Çarpımı

Genel Formül:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} A_{11}v_1 + \cdots + A_{1n}v_n \\ \vdots \\ A_{m1}v_1 + \cdots + A_{mn}v_n \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n A_{1i}v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{mi}v_i \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

MATLAB Kodu:

```
z=zeros(m,1); % matrix-vektor carpimi olusacak yeni vektor
for i = 1:m %her satır için
    for j = 1:n %her sutun icin
        z(i)= z(i)+A(i,j)*v(j);
    end
end
end
```

İç çarpım bloğu



Direkt iç çarpım yaparak içerideki for loop'tan kurtulabiliriz:

```
z=zeros(m,1); % matrix-vektor carpimi olusacak yeni vektor
for i = 1:m %her satır için
    z(i)= A(i,:)*v;
end
```

2. Sütunlar ile Vektörü Çarpmak

Matris – vektör çarpımında ikinci bir yol olarak matrisin sutunlarini vektörün bileşenleri ile çarpıp toplayabiliriz.

Diyelimki A matrisi 3 tane satırdan sütundan olussun ve v vektörünün boyutu 3 olsun. A 'nin sütunlarını 1,2 ve 3 ile numaralandıralım.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 \cdot \begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} + v_2 \cdot \begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & 2 & 3 \end{array} + v_3 \cdot \begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & 3 \end{array}$$

Direkt iç çarpım yaparak içerideki for loop'tan kurtulabiliriz:

```
z=zeros(m,1); % matrix-vektor carpimi olusacak yeni vektor
for i = 1:m %her satır için
    z(i)= A(i,:)*v;
end
```

2. Sütunlar ile Vektörü Çarpmak

Matris – vektör çarpımında ikinci bir yol olarak matrisin sutunlarini vektörün bileşenleri ile çarpıp toplayabiliriz.

Diyelimki A matrisi 3 tane satırdan sütundan olussun ve v vektörünün boyutu 3 olsun. A 'nin sütunlarını 1,2 ve 3 ile numaralandıralım.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 \cdot \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline 1 & \end{array} + v_2 \cdot \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline 2 & \end{array} + v_3 \cdot \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline 3 & \end{array}$$

vektör skaler çarpımı vektör skaler çarpımı vektör skaler çarpımı



Matris – Vektör Çarpımı

$$\begin{aligned} \text{ör. } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}_{5 \times 1} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 6 \end{bmatrix}_{5 \times 1} + \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 \end{bmatrix}_{5 \times 1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \\ 13 \end{bmatrix}_{5 \times 1} \end{aligned}$$

MATLAB Kodu

```
z=zeros(m,1); % matrix-vektor carpimi olusacak yeni vektor
for i = 1:n %her sutun için
    for j = 1:m %her satır için
        z(j)= z(j)+A(j,i)*v(i);
    end
end
```



Vektör-skaler çarpımıyla içteki for loop'tan kurtulabiliriz.

```
z=zeros(m,1); % matrix-vektor carpimi olusacak yeni vektor
for i = 1:n %her sutun için
    z= z+A(:,i)*v(i);
end
```

ör. Normal bir kisinin bir gun sonunda zombi olma olasiliği 0.2; normal kalma olasiligi 0.8 dir. Bir zombinin zombi kalma olasiliği 0.99, normale donme olasilgi 0.01 dir.

- Başlangıçta 99 normal insan 1 zombi varsa, bir gun sonra insan ve zombi sayilari ne olur?
- İki gün sonra insan ve zombi sayilari ne olur?

Çözüm.

$$\begin{array}{l} \text{insan olma} \\ \text{zombi olma} \end{array} \begin{array}{l} \triangleleft \\ \triangleleft \end{array} \begin{array}{cc} 0.8 & 0.01 \\ 0.2 & 0.99 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 99 \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 0.8 \cdot 99 + 0.01 \cdot 1 \\ 0.2 \cdot 99 + 0.99 \cdot 1 \end{array} = \begin{array}{c} 79.21 \\ 20.79 \end{array}$$

$\begin{array}{cc} \triangle & \triangle \\ \text{insan} & \text{zombi} \end{array}$

$$\text{ii. } \begin{bmatrix} 0.8 & 0.01 \\ 0.2 & 0.99 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 79.21 \\ 20.79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \cdot 79.21 + 0.01 \cdot 20.79 \\ 0.2 \cdot 79.21 + 0.99 \cdot 20.79 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63.58 \\ 36.42 \end{bmatrix}$$

