

BİL 1006

Bilgisayar Destekli Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu

Hafta 3:
Vektörler II



İki Vektörün Farkı

Bir vektörü diğerinden çıkarmak demek bu vektörü -1 skaleri ile çarpıp diğer vektör ile toplamak demektir.

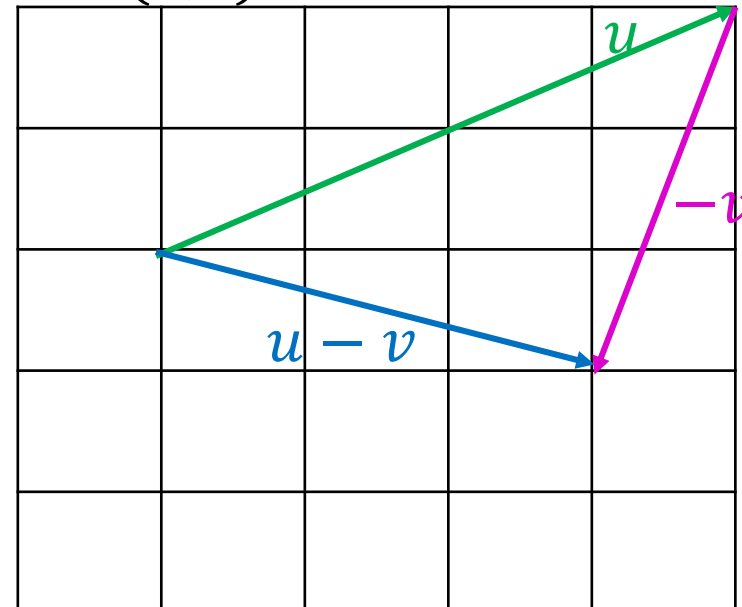
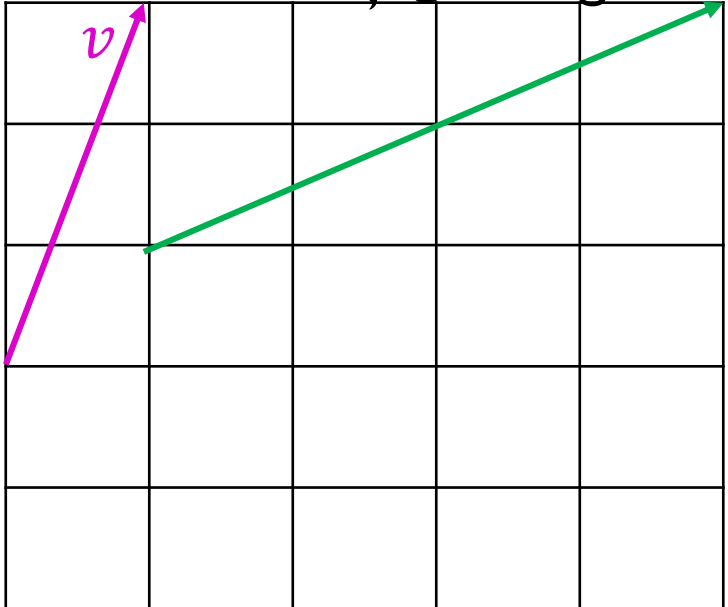
Genel olarak,

u ve v boyutları aynı olan iki vektör olsun. Şu halde

$$u - v = u + (-1 \cdot v)$$

Bu da geometrik olarak ikinci vektörün yönünün ters çevirilip birinci vektöre eklenmesi demektir.

Örnek olarak $\mathbb{R}^2$ aşağıdaki gibi $u = (4,2)$ ve $v = (1,3)$ vektörlerini ele alalım.



$$u - v = (3, -1)$$

İç Çarpım ve Vektör Uzunluğu

v ; n boyutlu bir vektör olsun: $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Bu vektörün kendisiyle iç çarpımı

$$v \cdot v = v_1 v_1 + \dots + v_n v_n = v_1^2 + \dots + v_n^2$$

olur.

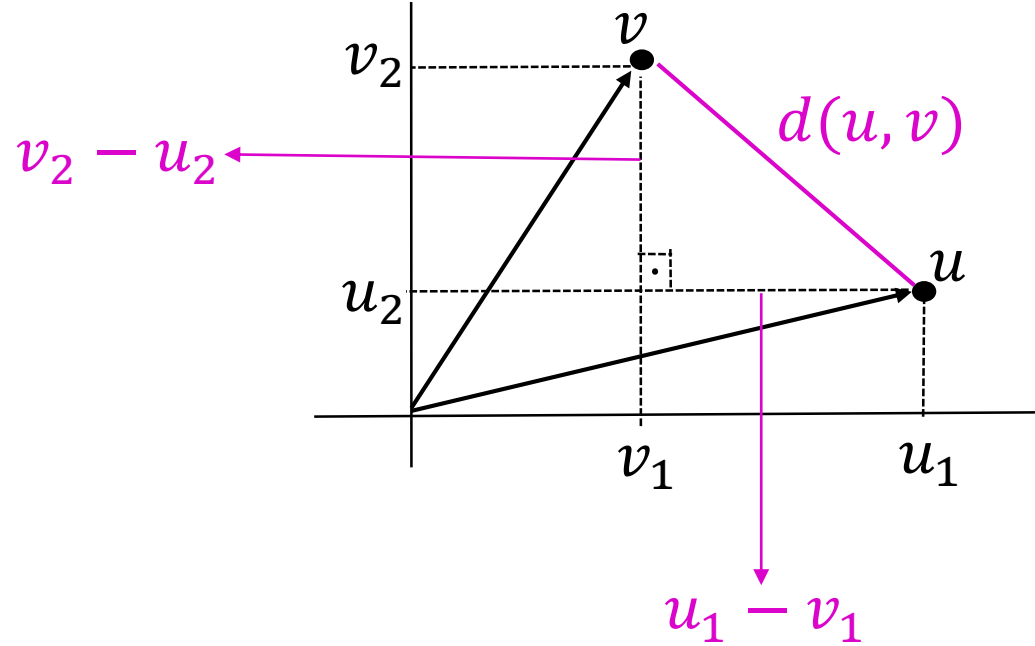
Hatırlarsak v vektörünün öklid uzunluğunu $|v| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ olarak hesaplıyorduk. Şu halde

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}$$

şeklinde hesaplayabiliriz.

İki Vektörün Birbirine Uzaklığı

u ve v , $\mathbb{R}^2$ de iki vektör olsun: $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$. u ve v vektörleri arası uzaklığı $d(u, v)$ ile gösterelim.



Pisagor teoreminden:
$$\begin{aligned} d(u, v) &= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (v_2 - u_2)^2} \\ &= \sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1 + v_2^2 + u_2^2 - 2v_2u_2} \\ &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2(u_1v_1 + v_2u_2)} \\ &= \sqrt{u \cdot u + v \cdot v - 2(u \cdot v)} \end{aligned}$$

$$d(u, v) = \sqrt{u \cdot u + v \cdot v - 2(u \cdot v)}$$

$$d(u, v) = \sqrt{(u - v) \cdot (u - v)}$$

ör. Diyelimki K1, K2, K3 ve K4 kodlu 4 kisi ve M1, M2, M3, M4, ve M5 kodlu 5 film olsun. Aşağıdaki tablo bu kisilerin bu filmlere verdigi puanları gstersin. Amacımız K4'ün M5'e verdigi puanı tahmin etmek olsun. Bu durumda izlenilecek bir strateji, önce K4'e en yakın kişiyi bulmak, daha sonra bulunan kisinin M5'e verdigi puanı K4'ün puanı olarak tahmin etmek.

	M1	M2	M3	M4	M5
K1	3	8	7	5	5
K2	4	9	8	9	7
K3	2	7	5	4	3
K4	4	8	6	7	?

	M1	M2	M3	M4	M5
K1	3	8	7	5	5
K2	4	9	8	9	7
K3	2	7	5	4	3
K4	4	8	6	7	?

$$d(K4, K1) = \sqrt{(1,0,1,2) \cdot (1,0,1,2)} = \sqrt{6}$$

$$d(K4, K2) = \sqrt{(0,1,2,2) \cdot (0,1,2,2)} = \sqrt{9}$$

$$d(K4, K3) = \sqrt{(2,1,1,3) \cdot (2,1,1,3)} = \sqrt{15}$$

olduğundan K4'e en yakın kişi K1'dir. K1 kisinin M5 için puanı 5 olduğundan, K4'un M5 için puanını 5 olarak tahmin ederiz.

LİNEER TRANSFORMASYON

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun. Lineer Cebirde 3 temel görevimiz vardır:

1. Verilen bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \in \mathbb{R}^m$ i bulmak
2. Verilen bir $y \in \mathbb{R}^m$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}^n$ i bulmak (görüntüsü y vektörü olan x vektörünü bulmak)
3. $f(x) = \lambda x$ olacak şekilde x vektörünü ve λ skalerini (reel sayısını) bulmak.

Eğer f fonksiyonu bir lineer transformasyon ise bu üç görevi kolaylıkla yerine getirebiliriz.

Lineer Transformasyon:

Bir $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir fonksiyonu lineer transformasyon olması için iki şartı sağlaması gerek ve yeterlidir:

1. α herhangi bir skaler, ve $u, \mathbb{R}^n$ 'de herhangi bir vektör olmak üzere $f(\alpha u) = \alpha f(u)$
2. u ve $v, \mathbb{R}^n$ 'de herhangi herhangi iki vektör olmak üzere $f(u + v) = f(u) + f(v)$



1. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ demek:

Bir vektörün uzatılmış, yada kısaltılmış halinin görüntüsü; görüntünün uzatılmış yada kısaltılmış haline eşit olmalıdır.

2. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ demek:

İki vektörün toplamının görüntüsü, bu vektörlerin görüntülerin toplamına eşit olmalıdır.

ör. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ fonksiyonu bir lineer transformasyondur.

Bunu kanıtlamak için iki şeyi göstereceğiz:

1. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ olduğunu gösterelim.

$$f(\alpha x) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + x_2) \\ \alpha x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha f(x)$$

2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ olduğunu gösterelim.

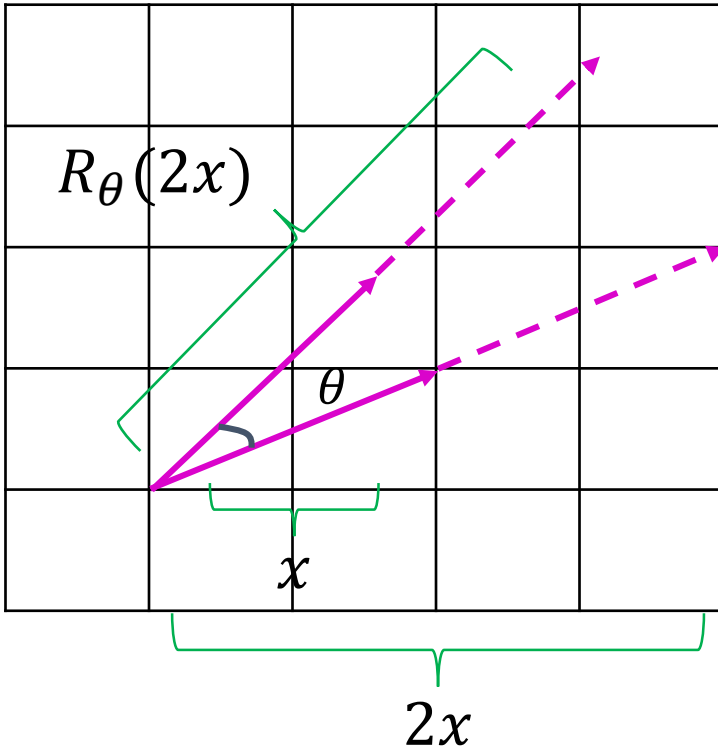
$$f(x + y) = f\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = f(x) + f(y)$$



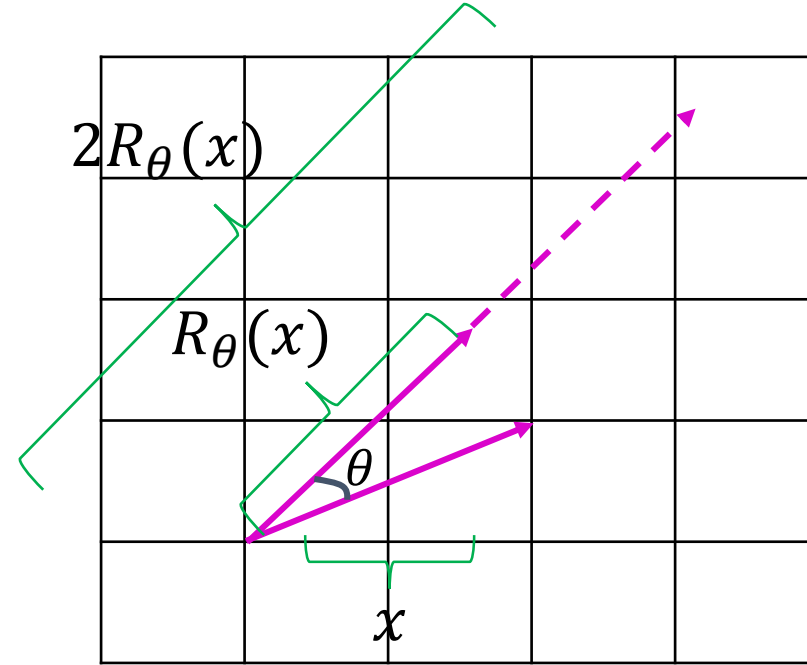
ör. $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rotasyon (döndürme) fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ deki bir vektörü θ açısı kadar döndürür. Bu fonksiyon bir lineer regresyondur.

Kanıt:

I. $R_\theta(\alpha x) = \alpha R_\theta(x)$ olduğunu gösterelim. Bu, uzatılmış (yada kısaltılmış) vektörün döndürülmüş halinin, vektörün döndürülmüş halinin uzatılmasına (yada kısaltılmasına) eşit olduğu anlamına gelir. Gerçekten

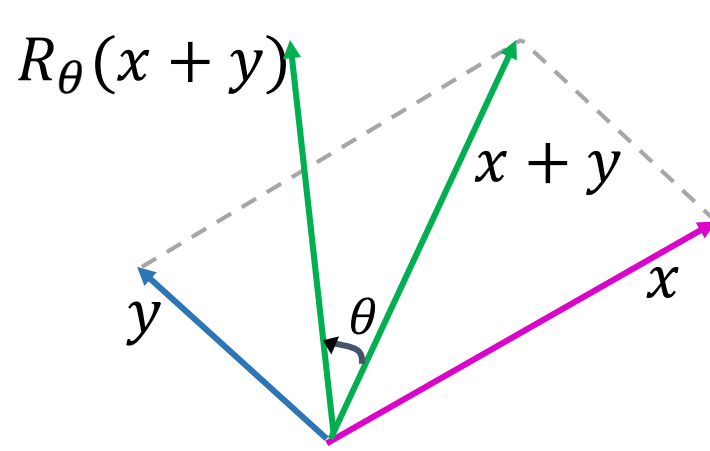


(uzatılmış halin döndürülmüş hali)

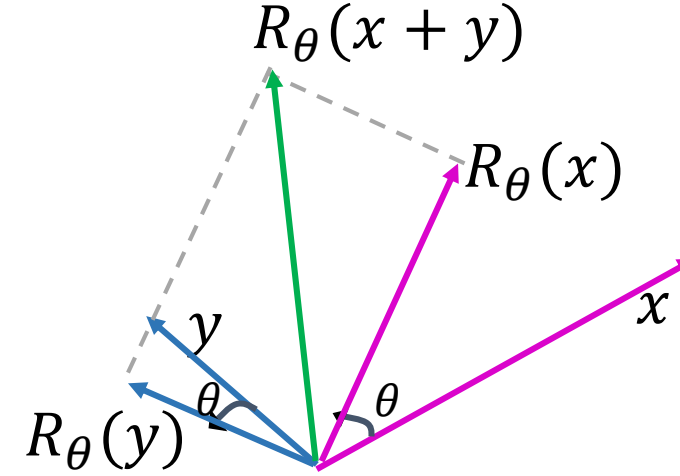


(döndürülmüş halin uzatılmış hali)

2. $R_\theta(x + y) = R_\theta(x) + R_\theta(y)$ olduğunu gösterelim. Bu, iki vektörün toplamının döndürülmüş halinin, bu vektörlerin döndürülmüş hallerinin toplamına eşit olduğu anlamına gelir.



(toplamın döndürülmüş hali)



(döndürülmüş vektörlerin toplamı)

ör. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ fonksiyonun lineer transform olmadığını gösterelim.

$$\alpha = 0 \text{ ve } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ alınırsa } f(\alpha x) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha f(x)$$

Lineer Transformasyonun Genelleştirilmesi

Teorem: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir fonksiyonun bir lineer transformasyon olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

olmasıdır.

Kanıt: $\Rightarrow$) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir lineer transformasyon olsun. $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ olduğunu göstereceğiz.

$$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

lineer transformasyonun
ikinci özelliğinden

lineer transformasyonun
birinci özelliğinden

$\Leftarrow$) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ olsun. f 'nin bir lineer transformasyon olduğunu göstereceğiz.

1. $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ alınırsa $f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha f(x)$
2. $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ alınırsa $f(\alpha x + \beta y) = f(x + y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(x) + f(y)$

Sonuç: Bir fonksiyonun lineer transformasyon olduğunu göstermek için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

olduğunu göstermek gereklidir ve yeterlidir.

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ nin Doğal Genişlemesi

f bir lineer transformasyon iken $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ özelliğini genişletebiliriz.

$x^1, x^2, \dots, x^m$ $\mathbb{R}^n$ 'de m tane vektör olsun: $x^i \in \mathbb{R}^n$ ($i \in \{1, \dots, m\}$)

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ m tane skaler olsun: $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \{1, \dots, m\}$). Şu halde

$$f(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_m x^m) = \alpha_1 f(x^1) + \alpha_2 f(x^2) + \dots + \alpha_m f(x^m)$$

olur. Bu ifadenin kompakt hali:

$$f\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x^i\right) = \sum_{i=1}^m f(\alpha_i x^i)$$