BİL 1006
Bilgisayar Destekli
Lineer Cebir

Fırat İsmailoğlu

Hafta 2:
Vektörler

Ders Sorumlusu:

Dr. Öğr. Üyesi Fırat İsmailoğlu

Bilgisayar Mühendisliği, Oda No:202

fismailoglu@cumhuriyet.edu.tr

Ders Hakkında:

- Dersin websitesi: ceng1.cumhuriyet.edu.tr/lectures/bil1006
- 12 Hafta Ders
- Kitap: Linear Algebra and Probability for Computer Science Applications, Ernest Davis
- Değerlendirme: %40 Vize + %60 Final
- Yaz okulu olmayacak

VEKTÖR

Vektör kısaca sayılar listesidir (sıra halinde yazılmış sayılar).

Bu sayılardan her biri vektörün bir *bileşenidir*.

Toplam bileşen sayısı vektörün *boyutunu* verir.

ör. $x,\ n$ −boyutlu bir vektör olsun $(n > 2)$.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

vektörün bileşenleri

Satır Vektör – Kolon Vektör

Satır vektör, vektör bileşenlerinin bir satır halinde soldan sağa yazılmasıyla elde edilir.

Kolon vektör, vektör bileşenlerinin bir kolon (sütun) halinde yukarıdan aşağıya yazılmasıyla elde edilir.

Not: Aksini belirtmedikçe, vektör dediğimizde kolon vektörünü düşüneceğiz.

x, n −boyutlu bir vektör olsun. Bu durumda

$$x \in \mathbb{R}^n$$

diyeceğiz. Bu demektirki x vektörünun bileşenleri (yani x_i $(i = \{1, \dots, n\})$ birer reel sayıdır.

Bazı Özel Vektörler

1. Sıfır Vektörü

Bileşenlerinin tamamı 0 olan vektöre sıfır vektörü denir; $\mathbf{0}$ ile gösterilir.

2. Birim (Ünit) Vektör

n −boyutlu e^i birim vektörünün i. bileşeni 1; diğer tüm bileşenleri 0 'dır.

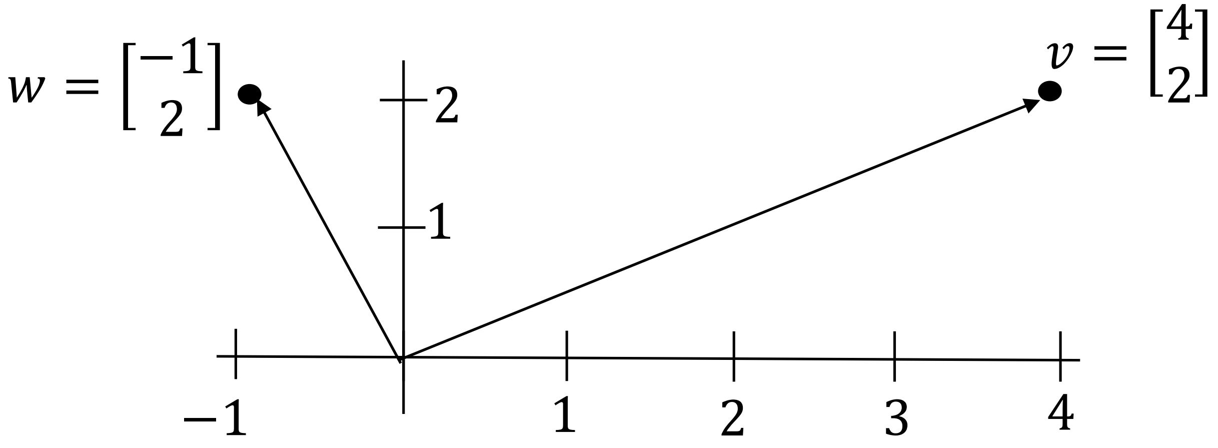
ör. 4 boyutlu e^3 vektörü: $$e^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektörlerin Uygulamaları

1. Geometrik Noktalar

Iki (yada) üç boyutlu uzayda noktalar vektörlerle gösterilebilir.

ör. $\mathbb{R}^2$ de $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörlerini ele alalım.



Vektörlerin Uygulamaları

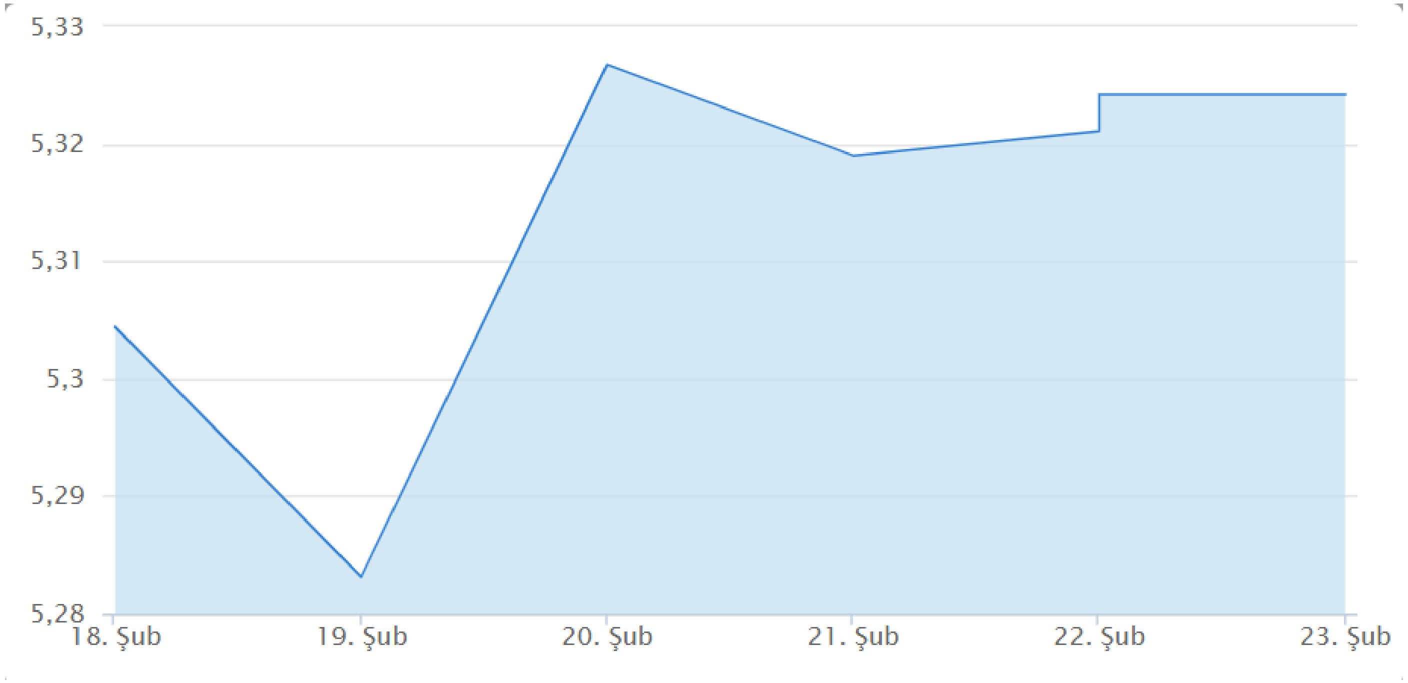
2. Zaman Serileri (Time Series)

Zaman içersinde sürekli olarak kaydedilen verilerin kronolojik sirayla yazilmiş listesine zaman serisi denir.

Bu veriler, gunluk, haftalik, dakikaklik, saniyelik, yillik … olarak ölçülmüş olabilir.

ör. Doların 18.02.2019 ve 24.02.2019 tarihleri arasi günluk degerlerinin oluşturduğu vektör:

$$d = \begin{bmatrix} 5.3 \\ 5.28 \\ 5.32 \\ 5.31 \\ 5.32 \\ 5.32 \end{bmatrix}$$



Vektörlerin Uygulamaları

3. Kişisel Veritabanı

Vektörler kişilerin sayısal özelliklerini gösterebilir. Örneğin Ahmet 89 kg, 195 cm , aylık geliri 6200 TL ve vucut sicakligi 36 derece olsun. Bu durumda

$$a = \begin{bmatrix} 89 \\ 195 \\ 6200 \\ 36 \end{bmatrix}$$

vektörü Ahmet'i tanimlarken kullanilabilir.

4. Döküman Analizi

Dökümanlar vektörler ile gösterilebilir.

Vektörün her bir bileşeni, doküman içersindeki bir kelimenin o doküman icerisindeki görulme sıklığı olur.

Dökümanları bu şekilde vektörlerle göstermeye 'kelime çantası (bag of words)' denir.

Vektörlerin Uygulamaları

Örnek olarak diyelimki bir d dökümanı şu iki cumleden oluşsun:

Kar yağar kar üstüne.

Derdim var dert üstüne.

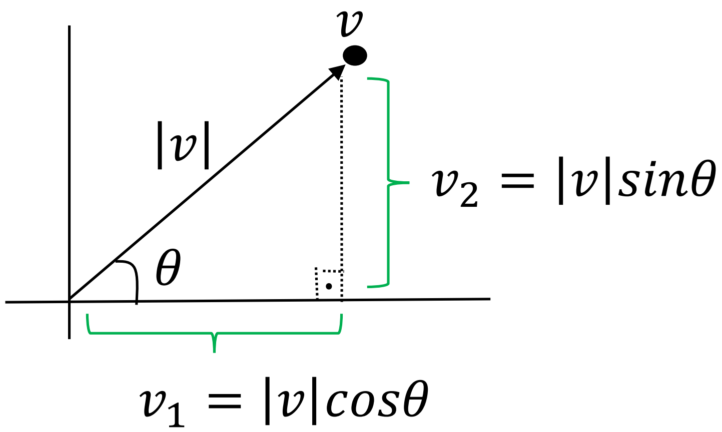
Bu dökümandaki kelimeler: kar, yağmak, üstüne,dert ve var. Bu kelimlerin görülme sıkığı sırasıyla: $2, 1, 2{,}2{,}1$.

Su halde d dökümanını $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü ile gösterebiliriz.

Vektör Büyüklüğü (Uzunluğu)

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^2$'de iki boyutlu bir vektör olsun. $|v|$ ile v vektörünün (öklid) büyüklüğünü göstereceğiz. Bu büyüklük pisagor teorimi ile hesaplanabilir:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



Not: Yukarıdaki şekilde hesaplanan büyüklük öklid büyüklüğüdür. Bundan başka büyüklük ölçüleri de vardır. Örneğin Manhattan büyüklüğü (yada l_1 normu): $|v| = |v_1| + |v_2|$

Temel Vektör Operatörleri

Vektörlerle iki temel işlem yapılır: bir sayı ile çarpma, (ayni boyutlu) iki vektörü birbirine ekleme.

1. Bir Vektörü Bir Sayı (Skaler) ile Çarpma

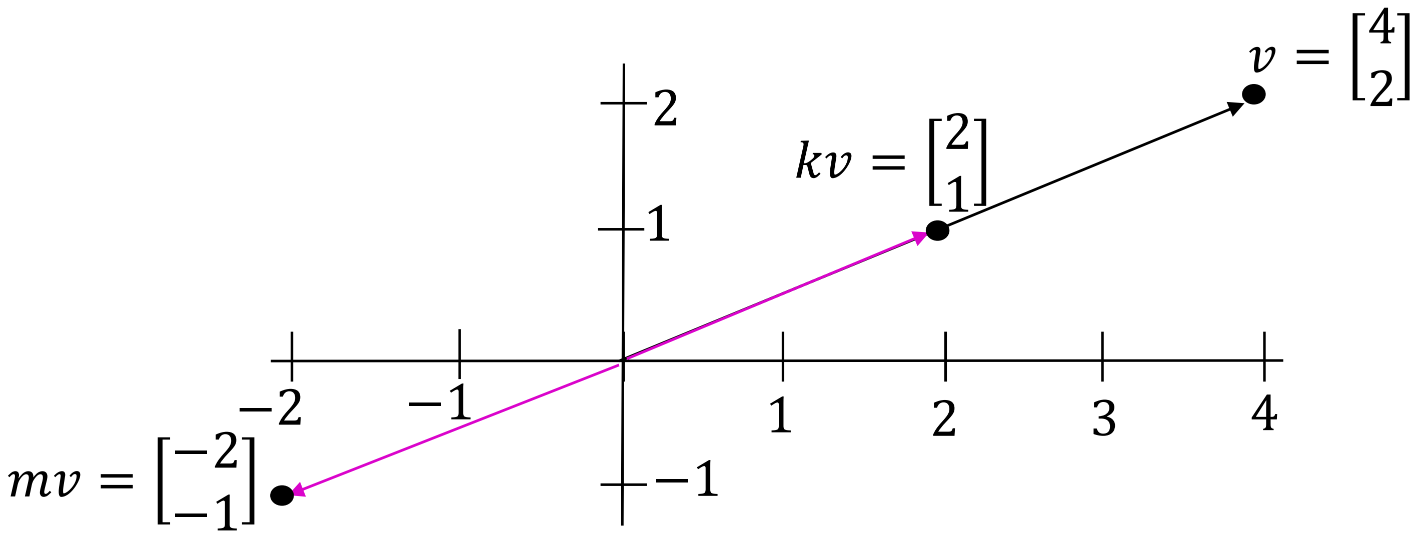
n −boyutlu bir vektörü bir sayı ile çarpmak demek, bu vektörün tüm bileşenlerini bu sayı ile çarpmak demektir.

Formal olarak diyelimki, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$; n −boyutlu bir vektör olsun. Bu vektör $k \in \mathbb{R}$ gibi bir reel sayı ile çarpılırsa $kx = \begin{bmatrix} kx_1 \\ \dots \\ kx_n \end{bmatrix}$ vektörü ortaya çıkar.

Geometrik olarak olarak yorumlandiğinda, bir vektor bir sayi ile carpildiginda bu vektorun dogrultusu degismez ama yönu ve boyu degisebiir.

Bir Vektörü Bir Sayı ile Çarpma

Örnek olarak $\mathbb{R}^2$ de $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörlerünü ele alalım. $k = \frac{1}{2}$ için $kv = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $m = -\frac{1}{2}$ için $mv = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ olur.



v vektörünü bir reel sayı ile çarparak elde ettigimiz vektorler v ile aynı doğrultuda olmak zorunda
fakat boylari ve yonleri v'den farkli olabilir.

Temel Vektör Operatörleri

2. Boyutları Aynı Olan Vektörleri Toplama

n −boyutlu vektörlerin karşılıklı bileşenlerini toplayarak bu vektörlerinin toplamıyla oluşan vektörü elde ederiz.

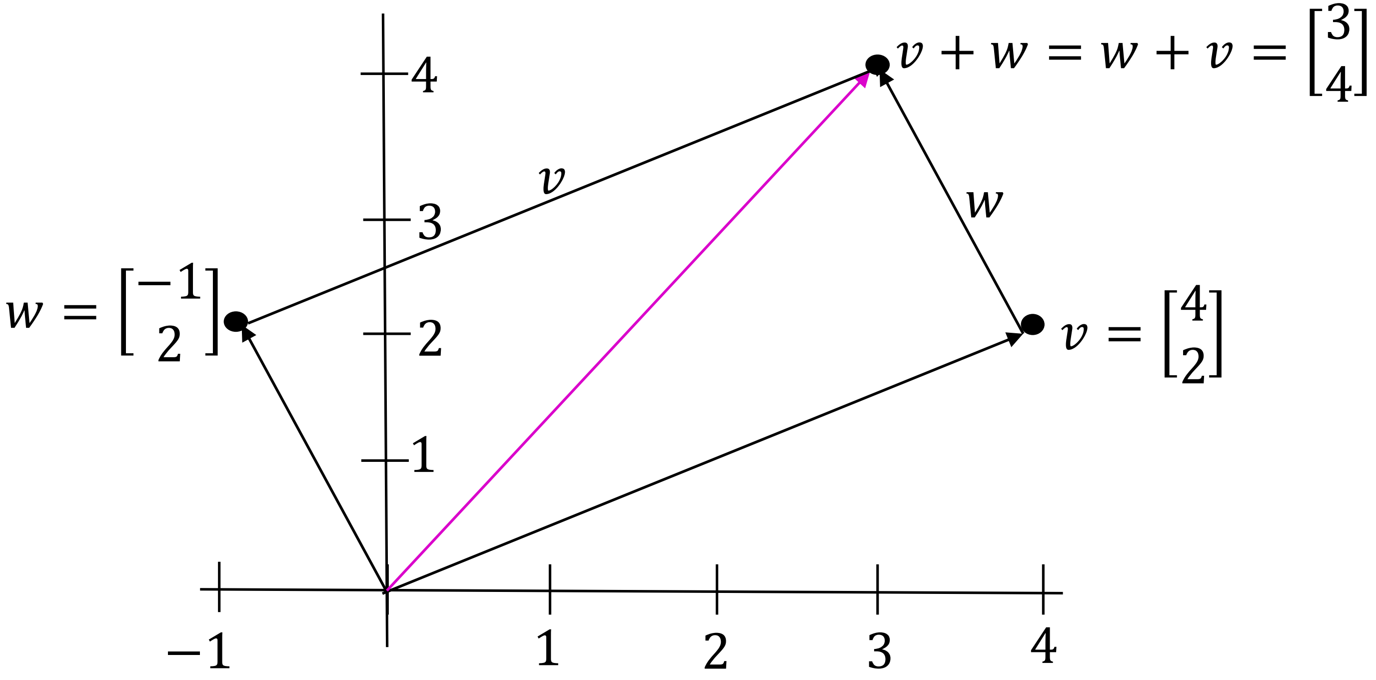
Formal olarak diyelimki, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$; ve $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$ iki n −boyutlu vektör olsun. Şu halde

toplam vektörü $x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \cdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$ olur.

Geometrik olarak olarak yorumlandiğinda, iki vektörün toplamiyla oluşan vektör, bu iki vektörün uç uca eklenmesiyle oluşan vektördür.

Boyutları Aynı Olan Vektörleri Toplama

ör. $\mathbb{R}^2$ de $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörlerini ele alalım $v + w$ yada $w + v$ vektörü: $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$



Toplam vektörü karşılıklı bileşenlerin toplanmasıyla elde edilir.

Vektörleri Operatörlerinin Özellikleri

Vektör operatörleri olan sayı ile çarpma ve toplama aşağıdaki özellikleri taşır.

v ve w aynı boyutlu iki vektör; k ve m iki reel sayı olmak üzere:

$v + w = w + v$

$k \cdot (v + w) = kv + kw$ (çarpmanın toplama üzerine soldan dağılması)

$(v + w) \cdot k = kv + kw$ (çarpmanın toplama üzerine sağdan dağılması)

$0 \cdot v = \mathbf{0}$ (bir vektör 0 ile çarpılırsa sıfır vektörü elde edilir)

$v + \mathbf{0} = v$ (sıfır vektörünün toplamaya göre etkisiz eleman olması)

$v - v = \mathbf{0}$ (v vektörünün toplamaya göre tersinin $-v$ olması)

Vektörlerin Lineer Kombinasyonu

Daha önce gördüğümüz skalarle çarpma ve vektörlerin toplanması operatörlerini kullanarak vektörlerin lineer kombinasyonunu elde edeceğiz.

Lineer Kombinasyon:

v ve w aynı boyutlu iki vektör; k ve m iki reel sayı olmolsun. Bu durumda

$$kv + mw$$

v ve w vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olur.

ör. $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}; k = 2$ ve $m = -4$ olsun. Bu durumda

$$kv + mw = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \cdot -1 \\ -4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \end{bmatrix}$$

vektörü v ve w vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olur.

Not:Vektörleri aksi belirtilmedikçe kolon vektörü olarak düşüneceğimizi söylemiştik ve vektörleri yuukarıdan aşağı bir kolon olarak gösterdik.

Şu andan itibaren vektörleri parantez içinde ve soldan sağa bir sıra halinde gostereceğiz. Fakat bu halde gösterilse dahi vektörleri kolon vektörü gibi düşüneceğiz.

ör. $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ vektörü $v = (-1,2,7)$ şeklinde gösterilecek.

Lineer Bağımlılık (Linear Dependence)

u ve v aynı boyutlu iki vektör; a ve b ise ikisi birden 0'dan farklı iki reel sayı olsun (yani a ve b aynı anda 0 olamaz).

Bu durumda eğer

$$\boxed{au + bv = 0}$$

oluyorsa u ve v vektörlerine lineer bağımlı vektörler denir.

Bu, u ve v vektörlerinin birbirlerinden elde edilebileceği anlamına gelir.

Lineer Bağımlılık (Linear Dependence)

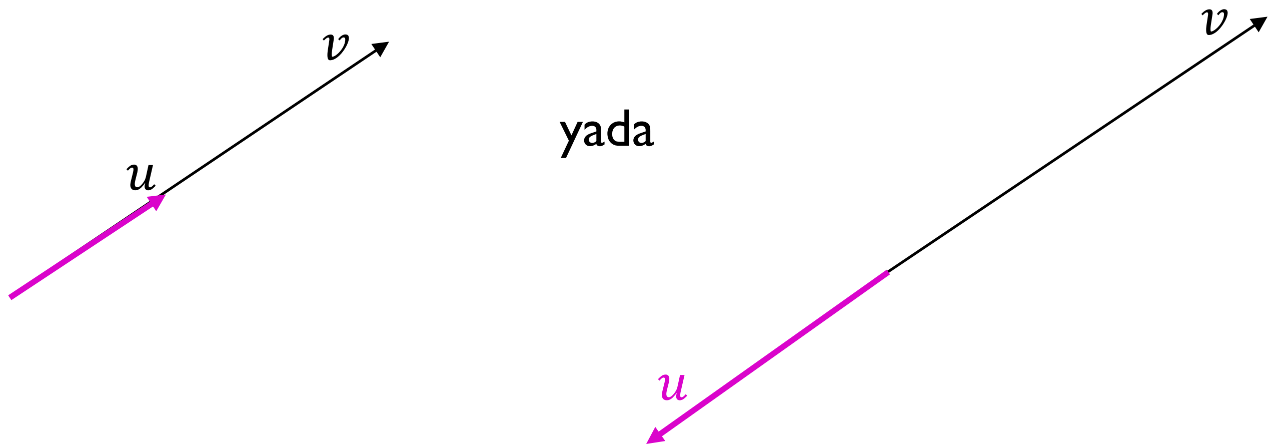
u ve v eğer lineer bağımlı ise

$$au + bv = 0$$

oluyordu. Bu durumda u ve v yi ayrı ayrı yalnız bırakırsak

$$u = -\left(\frac{b}{a}\right)v \quad ; v = -\left(\frac{a}{b}\right)u$$

olur. Burada u, v'nin bir reel sayıyla çarpılmasından elde ediliyor. Bu, lineer olarak birbirine bagimli olan u ve v vektörlerinin aynı doğrultuda olduğu anlamına gelir.



VEKTÖR UZAYLARI

V bir vektörler kümesi olsun. Ve bu küme uzerinde reel sayı ile çarpma ve vektörlerin toplanması tanımlı olsun.

($\forall\, u, v \in V$ ve $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için $au + bv \in V$, yani V'den alınan tüm vektörlerin lineer kombinasyonu yine V kümesinde)

Bu durumda V kümesi bir vektör uzayı olur.

ör. En meşhur vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ dir.

İç Çarpım – Nokta Çarpım (Dot Product)

Iki n $-$ boyutlu vektörün iç çarpımı, karşılıklık bileşenlerin çarpılarak toplanmasıyla ortaya çıkan sayıdır. Formal olarak,

u ve v n $-$ boyutlu iki vektör olsun. Şu halde iç çarpım:

$$\boxed{u \cdot v = \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i}$$

Iç Çarpımın Cebirsel Özellikleri

1. $u \cdot v = v \cdot u$ (değişme ozelligi)
2. $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ (iç carpımın vektör toplama uzerine dağılma özelliği)
3. $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$ (k bir reel sayı olmak üzere)

ör. (ağırlıklı toplama) Diyelimki bir kişi 3 kg elma, 2.5 kg muz, 1 kg armut ve 4 kg cilek alsin. Elmanin, muzun, armutun ve cilegin bir kilo fiyatlari sirasıyla 3.5, 4, 7 ve 12 TL olsun. Bu durumda bu kisinin bu alisveris sonucunda odeyecegi parayi iç çarpimla bulabiliriz.

Fiyat vektörü u olsun: $u = (3.5\ , 4, 7, 12)$

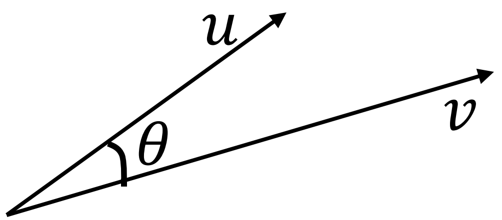
Her bir üründen kaçar kilo alınacağınıda v vektörü göstersin : $v = (3, 2.5, 1, 4)$.

Su halde toplam ucret:

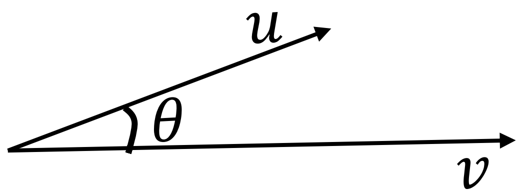
$$u \cdot v = 3.5 \cdot 3 + 4 \cdot 2.5 + 7 \cdot 1 + 12 \cdot 4 = 75.5$$

Iç Çarpımın Geotmetrik Yorumu

$u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$, $\mathbb{R}^{2}$'de iki vektör olsun, ve aralarındaki açı θ olsun.



Bu vektörleri v vektörününün dikeyde uzunluğu olmayana kadar döndürürsek(yani yatayla paralel olacak sekilde) aşağıdaki gibi olur:



Bu durumda v_2 (yani dikeydeki buyukluk) 0 olur $(v_2 = 0)$ ve yataydaki buyukluk v vektörünün kendi büyüklüğü olur: $v_1 = |v|$. Bu halde iç çarpım:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = u_1 |v|$$

u_1, yani u vektörününün yatayda büyüklüğü $|u| cos\theta$ idi. Bu büyüklük yukarıda yerine yazilirsa:

$$\boxed{u \cdot v = |u||v|cos\theta}$$

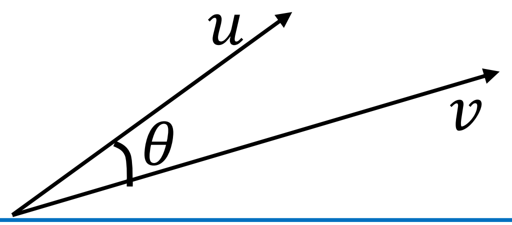
olur. Sonuc olarak iki vektörün iç çarpımı, bu vektörun uzunluklari ile aralarindaki acinin kosinusu carpilarak da bulunabilir.

Yukarıdaki denklemde $cos\theta$ yalnız bırakılırsa:

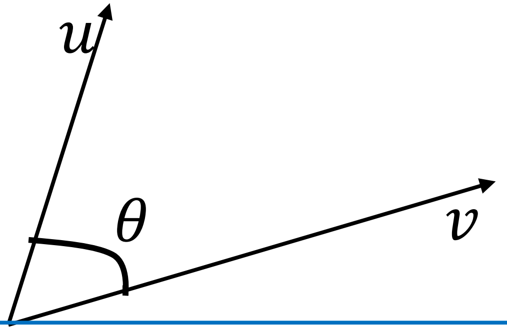
$$\boxed{cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}}$$

olur. Bu deger iki vektörün birbirine benzerliğinin hesaplanmasında kullanilabilir.

Hatırlanırsa, bir açı azaldıkça bu açının kosinusu büyür idi. Şu halde iki vektör arasindaki aci azlairsa, bu vektörler arasindaki acinin kosinusu buyur: yani iki vektörün birbirine benzerligi artar.



Benzerlik çok
(θ küçük, kosinus buyuk)



Benzerlik az
(θ büyük , kosinus küçük)

ör. 1. cümle: '*Seni sevmeyen ölsün*', 2.cümle: '*Sev seni seveni*', 3. cümle: '*Sevmekten kim usanır*' cümlelerinin birbirlerine olan cosine benzerliklerini bulunuz.

	Sen	Sevmek	Ölmek	Kim	Usanmak
1. cümle	1	1	1	0	0
2. cümle	1	2	0	0	0
3. cümle	0	1	0	1	1

1. cümle $(1,1,1,0,0)$; 2. cümle $(1,2,0,0,0)$; 3. cümle $(0,1,0,1,1)$;

$$\cos(1.\,cümle, 2.\,cümle) = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\ \cdot\sqrt{1^2+2^2}} = 0.77$$

$$\cos(1.\,cümle, 3.\,cümle) = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\ \cdot\sqrt{1^2+1^2}} = 0.41$$

olduğundan. 2. cumle, 1. cumleye daha benzerdir.